
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01015083 7

INTÉGRALES DE LEBESGUE.

FONCTIONS D'ENSEMBLE.

CLASSES DE BAIRE.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

INTÉGRALES DE LEBESGUE
FONCTIONS D'ENSEMBLE
CLASSES DE BAIRE

LEÇONS PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE,

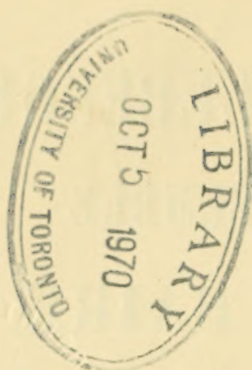
PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN,
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916


LIBRARY
OCT 5 1970
UNIVERSITY OF TORONTO

PRÉFACE.

La Belgique, victime de cruelles violences, a rencontré, dans ses épreuves, de grands et de nombreux témoignages de sympathie. L'Université de Louvain en a recueilli sa part. Ses professeurs, dispersés après le désastre de la ville, ont été invités dans des Universités étrangères. Beaucoup y ont trouvé un asile, quelques-uns même la possibilité de poursuivre leur enseignement. Ainsi, j'ai été appelé à faire des conférences à l'Université Harvard en Amérique l'année dernière, puis cette année au Collège de France. Le présent Volume contient la matière des Leçons que j'ai faites au Collège de France entre décembre 1915 et mars 1916. Il est, après bien d'autres, un modeste souvenir de ces événements.

Cet Ouvrage a été divisé en trois Parties.

Dans les deux premières, j'étudie les *fonctions additives d'ensemble*. J'appelle ainsi les fonctions dont la valeur sur une somme d'ensembles est la somme des valeurs sur chaque terme. Ces termes, deux à deux sans point commun, peuvent être *en nombre infini*. Je m'étais déjà occupé de ces fonctions dans mes Leçons de Harvard qui ont été partiellement publiées dans les *Transactions of the american mathematical Society*, 1915 [1]. Mais ici je précise mieux les questions et j'introduis de nouvelles méthodes.

---

[1] Une partie des résultats établis dans cet article se trouvaient dans la troisième édition du Tome II de mon *Cours d'Analyse*, qui était sous presse lors de l'incendie de Louvain. Les Allemands ont brûlé cet Ouvrage : toutes les installations de mon éditeur ont, en effet, partagé le sort de la bibliothèque de l'Université.

La notion générale de fonction additive d'ensemble est une des plus importantes que l'on doive à M. H. Lebesgue (1910). Je me suis proposé dans ces Leçons de pousser aussi loin que possible l'analyse de l'*additivité* et de dégager les conséquences, singulièrement précises, que cette propriété entraîne à elle seule pour la fonction.

La plus simple et la première connue des fonctions additives d'ensemble est la *mesure*. M. E. Borel en a donné la définition dès 1898 et cette définition a été le point de départ de la théorie tout entière. C'est cette fonction que j'étudie, pour commencer, dans la première Partie. La mesure est une fonction, non négative, préalablement définie sur certains ensembles particuliers : les figures élémentaires. Pour obtenir sa définition sur les autres, posons-nous la question suivante : « Trouver tous les autres ensembles sur lesquels la mesure est définie, à partir des précédents, par la seule condition d'être additive. » Ce sont les ensembles mesurables.

On voit que la question de la mesure ainsi posée rentre dans un problème plus général assez complexe : « Une fonction étant donnée sur certains ensembles particuliers, tels les domaines élémentaires, existe-t-il une fonction additive d'ensemble qui coïncide avec la précédente sur les domaines ? » Cette question fondamentale est résolue dans la seconde Partie de ces Leçons. La conclusion permet de reconnaître qu'il y a complète équivalence entre les définitions d'une fonction d'ensemble additive et d'une fonction de point à variation bornée, sous la condition de continuité.

Parmi les fonctions additives d'ensemble, les plus importantes sont les fonctions *absolument continues*, qui se confondent avec les *intégrales indéfinies de Lebesgue* et dont M. Lebesgue a fait la théorie complète. La dérivation de ces fonctions est étudiée, dans la seconde Partie, par la méthode nouvelle des *réseaux*. Cette méthode, déjà utilisée dans mes

Leçons de Harvard, ne montre cependant tous ses avantages que par l'emploi des *réseaux conjugués* qui interviennent ici pour la première fois. Elle se suffit à elle-même (sans recours au théorème géométrique de M. Vitali) et les démonstrations auxquelles elle conduit sont plus naturelles et plus simples. Enfin, elle paraît s'imposer dans la dérivation des fonctions additives qui ne sont pas absolument continues.

Toutes ces questions sont surtout d'ordre *métrique*. Dans la troisième Partie, j'aborde des questions d'ordre plus exclusivement *descriptif*, étroitement liées cependant aux précédentes. Il s'agit de la répartition des fonctions dans les *classes successives de Baire*, du théorème de M. Baire sur les fonctions de classe 1 et des extensions de ce théorème que l'on doit à M. Lebesgue. Je pense avoir simplifié et complété l'exposition de ces théories si intéressantes par l'introduction de nouvelles méthodes et l'addition de nouveaux résultats.

Les questions traitées dans cet Ouvrage appartiennent à la théorie récente des fonctions dont MM. Borel, Baire et Lebesgue sont les fondateurs. Au cours de ses profondes recherches, M. Baire a limité un domaine fonctionnel réel qui suffit à tous les besoins de l'Analyse et au delà duquel toutes les généralisations paraissent condamnées à être vaines et stériles. Les fonctions de ce domaine jouissent de propriétés communes, bien précises. Les méthodes générales de l'Analyse leur sont applicables; et leur théorie, déjà riche de résultats, peut être considérée comme *la théorie générale des fonctions de variables réelles*. C'est là un progrès fondamental au point de vue philosophique et il est dû surtout à M. Lebesgue. Plus qu'aucun autre, M. Lebesgue a contribué à mettre de l'unité dans la théorie

des fonctions de variables réelles et à lui assurer par là le caractère esthétique qui lui manquait. J'aurai atteint mon but si le lecteur retrouve ce caractère dans les pages qui suivent.

Maintenant qu'il me soit permis d'adresser mes bien vifs remercîments à MM. les Professeurs du Collège de France, dont l'invitation a été si flatteuse pour moi; à mes auditeurs, qui m'ont témoigné tant de bienveillance; à M. Borel, qui m'a fait l'honneur d'accueillir ce travail dans la Collection qu'il dirige et qui est si justement réputée; enfin à mes amis MM. Montel et Lebesgue, qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail et en revoir les épreuves avec moi. Ces corrections ont soulevé des discussions dont j'ai tiré grand profit.

C. de la Vallée Poussin.

Paris, juillet 1916.



INTÉGRALES DE LEBESGUE.
FONCTIONS D'ENSEMBLE.
CLASSES DE BAIRE.

PREMIÈRE PARTIE.
ENSEMBLES MESURABLES ET INTÉGRALES DE LEBESGUE.

CHAPITRE I.
NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES ENSEMBLES DE POINTS.

1. — Définitions et théorèmes fondamentaux.

1. Puissance des ensembles. — Nous supposons connues les définitions et propriétés suivantes que nous admettrons sans démonstration [1].

Un *ensemble* est une collection d'objets ou d'éléments en nombre fini ou infini. Ces éléments seront des nombres, des points, des intervalles, etc.

Deux ensembles ont même *puissance* (Cantor) si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'un et ceux de l'autre.

Un ensemble qui a la même puissance que celui de tous les entiers 1, 2, 3, ..., n, ... est *dénombrable*. On peut alors distinguer ses éléments par un indice et les ranger dans un ordre déterminé

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots.$$

---

[1] Voir *Leçons sur la théorie des fonctions*, par E. Borel.

Chaque terme est suivi d'un autre et en a un nombre déterminé avant lui.

Toute infinité d'éléments comprise dans un ensemble dénombrable est dénombrable.

L'ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. Il existe des ensembles non dénombrables. Ainsi, nous constaterons plus loin que l'ensemble des nombres réels compris entre o et 1 n'est pas dénombrable (n° 23).

2. Ensemble de points. Définitions. — Soient x, y, ... des variables réelles. Tout système particulier de valeurs de ces variables est un *point*, dont x, y, ... sont les *coordonnées*. Un ensemble de points a autant de dimensions qu'il y a de coordonnées. Il est linéaire, superficiel, spatial, à n dimensions, suivant qu'il y a une, deux, trois, n coordonnées. Suivant le cas, les points sont sur une droite, dans un plan, dans l'espace ou l'hyperespace.

Un ensemble est *borné* si ses coordonnées sont bornées. Les bornes des coordonnées sont aussi celles de l'ensemble.

La *distance de deux points* p et p' de coordonnées a, b, ... et a', b', ... est, par définition, la quantité

$$\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+\dots}$$

La *distance d'un point p à un ensemble* E est la borne inférieure de la distance du point p à un point de E.

La *distance de deux ensembles* est la borne inférieure de la distance d'un point de l'un à un point de l'autre.

Le *diamètre* d'un ensemble borné est la borne supérieure de la distance de deux de ses points.

Un *domaine de centre p et de rayon δ* est l'ensemble des points à distance $< \delta$ du point p. C'est un intervalle, un cercle, une sphère, ..., suivant le nombre des dimensions de l'espace considéré.

Un point p d'un ensemble E est un *point isolé* s'il n'y a pas d'autre point de E dans un domaine de centre p et de rayon suffisamment petit.

Un point p est un *point limite* de E si tout domaine de centre p contient une infinité de points de E.

Un point p est *limite* d'une suite de points $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ si la distance pp_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Avec cette définition, on peut aussi dire qu'un point limite de E est un point qui est limite d'une suite de points de E.

L'ensemble E' formé des points limites de E est l'*ensemble dérivé* de E.

Un ensemble qui contient son dérivé (donc tous ses points limites) est un *ensemble fermé* (au sens absolu). On s'assure facilement que *tout ensemble dérivé est fermé.*

Nous admettrons encore sans démonstration le théorème suivant, connu sous le nom de PRINCIPE DE WEIERSTRASS :

Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite.

3. **Point de condensation.** — M. Lindelöf appelle *point de condensation* d'un ensemble E un point, faisant ou non partie de E, tel que tout domaine de centre p contienne une infinité *non dénombrable* de points de E. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Un ensemble E, *borné ou non, dont aucun point n'est un point de condensation, est dénombrable* ([1]).

Donnons-nous une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ positive, décroissante et tendant vers zéro. Disons alors qu'un point p de E appartient au nombre ε_n, si l'ensemble des points de E contenus dans un domaine de centre p et de rayon ε_n est dénombrable, et si (quand n est > 1) cela n'a pas lieu pour le rayon ε_{n-1}. Si aucun point de E n'est un point de condensation, chacun d'eux appartient à un nombre correspondant ε_n. Donc E se décompose dans la somme des ensembles respectivement formés des points appartenant à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Il suffit de montrer que l'ensemble des points appartenant à l'un d'eux, ε_n, est dénombrable (ou nul).

L'espace entier peut se décomposer en une infinité dénombrable de parties de diamètre $< \varepsilon_n$. L'ensemble E se décompose, en même temps, dans une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$.

([1]) Cet énoncé m'a été communiqué verbalement par M. Dunham Jackson.

E_2, ..., de diamètre $\leq \varepsilon_n$, contenus respectivement dans chacune de ces parties. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des points de E_k qui appartiennent à ε_n, est dénombrable (ou nul). Or ceci est immédiat, car, si E_k contient un point p appartenant à ε_n, E_k est tout entier dans le domaine de centre p et de rayon ε_n à l'intérieur duquel E, par hypothèse, est dénombrable et E_k lui-même est dénombrable.

4. Théorème. — *Un ensemble* E *non dénombrable se compose d'un ensemble dénombrable* D *et d'un ensemble* N *dont tous les points sont des points de condensation de* N. *Nous dirons qu'un ensemble* N *dont tous les points sont des points de condensation est un noyau.*

Un ensemble extrait de E ne peut avoir comme point de condensation qu'un point de condensation de E. Donc, si nous retranchons de E ses points de condensation, l'ensemble restant D n'en a plus et est, par conséquent, dénombrable. D'autre part, l'ensemble des points de E qui sont des points de condensation, ne différant de E que par la suppression d'un ensemble dénombrable D, admet les mêmes points de condensation que E. C'est donc bien un noyau N dont tous les points sont des points de condensation. Ainsi E se compose de D et de N, et nous écrirons $E = D + N$.

5. Ensemble parfait. — Un ensemble E qui est identique à son dérivé E' est un *ensemble parfait*. Un ensemble parfait est donc un ensemble : 1° fermé; 2° sans point isolé. Nous allons prouver le théorème suivant :

L'ensemble des points de condensation d'un ensemble non dénombrable E *est parfait.*

Soit $E = D + N$ la décomposition fournie par le théorème précédent. Les points de condensation de E sont les mêmes que ceux de N. Tous les points de N sont des points de condensation et leurs points limites aussi. Donc l'ensemble des points de condensation de E est le dérivé N' de N, qui est fermé. Mais N est sans point isolé, donc N' aussi et, par conséquent, N' est parfait.

6. Théorème. — *Un ensemble fermé est dénombrable ou bien*

se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.

En effet, s'il n'est pas dénombrable, E se compose d'un ensemble dénombrable et d'un noyau N. Mais E est fermé, donc il contient tous ses points de condensation. Ainsi N est l'ensemble des points de condensation de E et N est parfait, en vertu de la proposition précédente.

2. — OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES.

7. Ensembles complémentaires. — Considérons un espace $x, y, \ldots$ à un nombre quelconque de dimensions. Un *domaine rectangulaire* Δ est l'ensemble des points dont les coordonnées $x, y, \ldots$ appartiennent respectivement à des intervalles assignés (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... Dans le cas linéaire, le domaine se réduit à un seul intervalle. Les intervalles sont *ouverts* ou *fermés*, selon que leurs extrémités sont exclues ou comprises. Le domaine est *ouvert* ou *fermé*, selon que les intervalles qui le définissent sont ouverts ou fermés. Sauf indication contraire, un domaine est supposé fermé.

Soit E un ensemble contenu dans un domaine rectangulaire Δ. L'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à E est le *complémentaire* de E par rapport à Δ. Il se désigne par CE.

L'ensemble Δ lui-même n'a pas de complémentaire. Mais il est commode de dire qu'il a pour complémentaire un ensemble dépourvu de point, que nous appellerons *ensemble nul*, et qui peut se représenter par zéro.

On considère aussi le complémentaire par rapport à tout l'espace. C'est un cas limite du précédent, le domaine Δ pouvant (par extension) embrasser tout l'espace.

8. Opérations fondamentales. — Les signes de la logique algébrique s'introduisent naturellement dans les opérations sur les ensembles, parce qu'elles jouissent de propriétés analogues à celles des opérations de l'arithmétique.

Ainsi, pour exprimer qu'un ensemble E_1 est contenu dans un ensemble E_2, nous conviendrons d'écrire

$$E_1 \leqq E_2 \quad \text{ou} \quad E_2 \geqq E_1.$$

Considérons maintenant un nombre limité d'ensembles E_1, E_2, ...; nous aurons à effectuer sur eux trois opérations : l'addition, la soustraction et la multiplication.

L'*addition* consiste à former l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots$ des points qui appartiennent à l'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ ou la *somme* de ces ensembles.

La *soustraction* consiste à retrancher de E_1 les points de E_2 ou à former la différence, $E_1 - E_2$, de ces deux ensembles.

La *multiplication* consiste à former l'ensemble des points communs à E_1, E_2, ... ou le *produit* $E_1 E_2 \ldots$ de ces ensembles.

La formation du *complémentaire* CE d'un ensemble E est un cas particulier de la soustraction.

La multiplication et la soustraction se ramènent l'une et l'autre à l'addition au moyen des complémentaires, et cette remarque est souvent précieuse dans les démonstrations. On a, en effet,

$$C(E_1 E_2) = CE_1 + CE_2, \qquad C(E_1 - E_2) = CE_1 + E_2.$$

L'addition et la multiplication sont *commutatives*, *associatives* et *distributives*, comme les opérations correspondantes de l'arithmétique. On a, par exemple,

$$E_1 E_2 = E_2 E_1, \qquad (E_1 E_2) E_3 = E_1 (E_2 E_3), \qquad E_1 (E_2 + E_3) = E_1 E_2 + E_1 E_3.$$

Toutes les règles du calcul algébrique des polynomes à termes positifs sont donc applicables aux polynomes formés avec des ensembles.

Ces règles ne s'appliquent plus s'il y a des termes négatifs, car la soustraction des ensembles n'est ni associative, ni commutative. Il n'y a que la loi distributive qui persiste :

$$E_1 (E_2 - E_3) = E_1 E_2 - E_1 E_3.$$

Les opérations précédentes sont *finies*, c'est-à-dire exécutées sur un nombre fini de termes. Il y a aussi une addition et une multiplication *infinies*.

L'*addition infinie* consiste à former l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles d'une suite dénombrable E_1, E_2, ... ou la *somme infinie* $E_1 + E_2 + \ldots$ de tous ces ensembles.

La *multiplication infinie* consiste à former l'ensemble des

points communs à une suite dénombrable $E_1, E_2, \ldots$ ou le *produit infini* $E_1E_2\ldots$ de ces ensembles.

La loi distributive subsiste dans la multiplication d'une somme infinie

$$E_1(E_2+E_3+\ldots) = E_1E_2+E_1E_3+\ldots$$

On en déduit, de proche en proche, que le produit *fini* de plusieurs sommes *finies ou infinies* se réduit à la somme des produits partiels.

On peut assurément réunir tous les points d'une famille non dénombrable d'ensembles, on peut aussi chercher l'ensemble des points communs à tous les ensembles de cette famille, mais ces opérations ne s'appellent pas une addition ni une multiplication et n'en possèdent pas les propriétés.

L'addition et la multiplication infinies rentrent, comme cas particuliers, dans une opération plus générale, qui est le *passage à la limite*. Cette opération se rattache à la définition de la *fonction caractéristique d'ensemble* que je vais faire connaître.

9. Fonction caractéristique d'ensemble. — J'ai défini cette fonction et j'en ai montré l'utilité dans un Mémoire récent [1]. Voici cette définition :

Soit E un ensemble dans un espace $x, y, \ldots$ à une ou plusieurs dimensions. La *fonction caractéristique* ou *la caractéristique* de l'ensemble E est la fonction

$$\varphi(x, y, \ldots),$$

égale à 1 dans E et à zéro dans le complémentaire.

Cette fonction jouit de propriétés intéressantes dans les opérations déjà définies :

Si φ est la caractéristique de E, $1-\varphi$ est la caractéristique de CE ;

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont les caractéristiques de $E_1, E_2, \ldots$ sans point commun deux à deux, $\varphi_1+\varphi_2+\ldots$ est la caractéristique de $E_1+E_2+\ldots$.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont les caractéristiques de $E_1, E_2, \ldots$, leur produit $\varphi_1\varphi_2\ldots$ est la caractéristique de $E_1E_2\ldots$ sans condition.

On déduit de là l'expression de la caractéristique de $E_1+E_2+\ldots$

[1] *Sur l'intégrale de Lebesgue* (*Transactions of the american mathematical Society*, 1915).

dans le cas général. Cette somme est complémentaire du produit $CE_1 CE_2 \ldots$; donc elle a pour caractéristique

$$1 - (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\ldots$$

10. Limites d'ensembles (1). — Considérons une suite illimitée d'ensembles

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots$$

et leurs caractéristiques respectives (égales à 0 ou à 1)

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots$$

Abstraction faite de l'ordre, l'ensemble des quantités $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$ admet, en chaque point, une borne supérieure et une borne inférieure. Ces bornes sont égales à 0 ou à 1, et nous les désignerons par

$$\overline{\text{borne}}\,(\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots), \qquad \underline{\text{borne}}\,(\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots).$$

Ce sont, comme on le vérifie de suite, les fonctions caractéristiques respectives des ensembles

$$E_n + E_{n+1} + \ldots, \qquad E_n E_{n+1} \ldots$$

Quand n augmente, la première borne est non croissante, la seconde non décroissante : elles tendent donc toutes deux, pour $n = \infty$, vers des limites déterminées (égales à 0 ou à 1). Ces limites sont *la plus grande* et *la plus petite limite* de φ_n pour $n = \infty$.

Ces plus grande et plus petite limites de φ_n sont, à leur tour, les fonctions caractéristiques de deux ensembles que nous appellerons les *plus grande* et *plus petite limites de* E_n pour $n = \infty$.

Si ces deux limites sont identiques, c'est-à-dire si φ_n a une limite unique, nous dirons que E_n a *une limite unique* dont la fonction caractéristique est la limite (unique) de φ_n.

Il y a deux cas où l'existence d'une limite unique est certaine *a priori* :

1° Si $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$, la suite des φ_n est non décroissante et tend vers 1 en tout point appartenant à l'un au moins des E_n. Par

(1) DE LA VALLÉE POUSSIN, Mémoire cité.

conséquent,

$$\lim E_n = E_1 + E_2 + \ldots .$$

2° Si $E_1 > E_2 > E_3 > \ldots$, la suite des φ_n est non croissante et φ_n ne tend vers 1 qu'en un point commun à tous les E_n. Par conséquent,

$$\lim E_n = E_1 E_2 \ldots .$$

Revenons au cas général. Désignons les plus grande ou plus petite limites par un trait supérieur ou inférieur; nous avons, ainsi qu'il a été dit plus haut,

$$\overline{\lim} E_n = \lim_{n=\infty} (E_n + E_{n+1} + \ldots),$$

$$\underline{\lim} E_n = \lim_{n=\infty} (E_n E_{n+1} \ldots).$$

Chaque ensemble $E_n + E_{n+1} + \ldots$ contient le suivant, tandis que chaque ensemble $E_n E_{n+1} \ldots$ est contenu dans le suivant. Nous sommes ainsi conduits aux deux cas particuliers que nous venons de traiter. Les plus grande et plus petite limites se ramènent ainsi à l'addition et à la multiplication par les formules

$$\overline{\lim} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots)\ldots,$$

$$\underline{\lim} E_n = E_1 E_2 E_3 \ldots + E_2 E_3 \ldots + E_3 \ldots + \ldots .$$

On voit facilement que la plus grande limite de E_n est l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de E_n; la plus petite limite, celui des points qui appartiennent à tous les E_n à partir d'un certain rang. Ces ensembles ont été considérés en premier lieu par M. Borel, qui leur avait donné le nom d'*ensembles limites complet* ou *restreint*.

Remarquons encore que les somme et produit infinis

$$E_1 + E_2 + \ldots, \qquad E_1 E_2 \ldots$$

sont respectivement les limites uniques pour $n = \infty$ des ensembles

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n, \qquad E_1 E_2 \ldots E_n.$$

L'addition et la multiplication infinies se ramènent donc à des passages à la limite, et réciproquement.

On peut appliquer aux passages à la limite sur les ensembles le

principe ordinaire : *La somme ou le produit d'un nombre limité d'ensembles ayant des limites (uniques) a aussi une limite, égale à la somme ou au produit des limites des ensembles composants.*

En effet, ce principe se ramène au principe analogue pour les fonctions caractéristiques.

3. — Ensembles ouverts et fermés sur un domaine.

11. Définitions (1). — Soit Δ un domaine rectangulaire (ouvert ou fermé) dans un espace à une ou plusieurs dimensions (un intervalle dans le cas linéaire). Nous allons considérer des ensembles contenus dans Δ et leurs complémentaires par rapport à Δ (n° 7).

Soit E un ensemble, et CE son complémentaire. Considérons un point M quelconque de Δ.

Le point M est *intérieur* (sur Δ) à E s'il est à distance non nulle de CE.

Le point M est *extérieur* (sur Δ) à E s'il est intérieur à CE.

Le point M est *frontière* (sur Δ) de E, et aussi de CE, s'il n'est ni intérieur ni extérieur, donc s'il est à distance nulle à la fois de E et de CE.

Le domaine rectangulaire Δ, d'après ces définitions, n'a pas de point frontière sur Δ, et c'est évidemment le seul ensemble contenu dans Δ qui soit dans ce cas.

Un ensemble E est *fermé* (sur Δ) s'il contient ses points frontières (sur Δ).

Un ensemble E est *ouvert* (sur Δ) s'il ne contient aucun point frontière (sur Δ), donc s'il ne contient que des points intérieurs (sur Δ).

Le domaine Δ lui-même peut être indifféremment considéré comme ouvert ou fermé sur lui-même.

On peut remplacer le domaine Δ par l'espace entier. Un ensemble fermé sur l'espace entier contient tous ses points limites et est *fermé au sens absolu* (n° 2). Un ensemble ouvert sur l'espace entier sera dit, de même, *ouvert au sens absolu*. Il est clair qu'un ensemble fermé sur un domaine fermé est fermé au

(1) Nous généralisons ici les définitions habituelles. Nous en donnerons encore une autre généralisation dans la troisième Partie (n° 104).

sens absolu, et qu'un ensemble ouvert sur un domaine ouvert est ouvert au sens absolu.

12. Propriétés des ensembles ouverts et fermés. — 1° *Si un ensemble* E *est fermé sur le domaine* Δ, *son complémentaire est ouvert, et réciproquement.*

C'est la conséquence immédiate des définitions.

2° *Les somme et produit d'un nombre limité d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts.*

Il suffit de considérer deux ensembles ouverts O_1 et O_2. Un point intérieur à chacun d'eux est à distance finie de CO_1 et de CO_2, donc à distance finie de $CO_1 . CO_2$ et de $(CO_1 + CO_2)$, donc intérieur aux complémentaires $(O_1 + O_2)$ et $O_1 O_2$.

3° *Les somme et produit d'un nombre limité d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.*

Ce théorème revient au précédent par les complémentaires.

4° *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

En effet, un point intérieur à l'un des termes est *a fortiori* intérieur à leur somme.

5° *Le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés est un ensemble fermé* (*ou nul*).

Ce théorème revient au précédent par les complémentaires.

6° *Toute plus petite limite d'ensembles fermés est une somme d'ensembles fermés; toute plus grande limite d'ensembles ouverts est un produit d'ensembles ouverts.*

Soit E la plus petite limite de $F_1, F_2, \ldots$ ou la plus grande limite de $O_1, O_2, \ldots$; on a, selon le cas,

$$E = F_1 F_2 F_3 \ldots + F_2 F_3 \ldots + F_3 \ldots + \ldots,$$
$$E = (O_1 + O_2 + O_3 + \ldots)(O_2 + O_3 + \ldots)(O_3 + \ldots)\ldots,$$

ce qui prouve la proposition (4° et 5°).

7° *Deux ensembles fermés* (*au sens absolu*) *et sans point commun sont à distance non nulle l'un de l'autre.*

Deux ensembles fermés F_1 et F_2 contiennent tous leurs points limites. Si F_1 est à distance nulle de F_2, il contient un point à

distance nulle de F_2, lequel appartient à F_2. Donc F_1 et F_2 ont un point commun.

13. Structure des ensembles linéaires ouverts. — Dans un espace linéaire, un domaine Δ se réduit à un intervalle (a, b) ouvert ou fermé. Supposons d'abord que E ne contienne aucune des deux extrémités a ou b. Nous allons montrer que E *est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts* (n° 7).

Soit M un point de E; M, étant *intérieur*, fait partie d'un intervalle entier de points de E dont les extrémités sont des points frontières appartenant, en conséquence, à CE. Donc E se compose d'intervalles ouverts, extérieurs les uns aux autres et, par conséquent, dénombrables par ordre de grandeur, car il n'y a dans (a, b) qu'un nombre limité d'intervalles d'amplitude $> \varepsilon$.

Supposons maintenant que E contienne a ou b; la seule différence avec le cas précédent sera que les intervalles extrêmes contenant ces points ne seront plus ouverts au sens absolu, mais seulement ouverts sur (a, b).

14. Structure des ensembles ouverts superficiels et spatiaux. — Soit E un ensemble superficiel, ouvert sur le domaine rectangulaire Δ. Nous allons montrer que E *est une somme de rectangles fermés, non empiétants, mais pouvant avoir des frontières communes*.

A cet effet, nous allons nous servir du procédé des *réseaux*, qui sera d'une grande utilité dans la suite.

Pour former un réseau R sur Δ, nous superposons une suite illimitée de grillages $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ définis comme il suit : Pour construire le grillage G_1, nous décomposons Δ en rectangles partiels, ω_1, par des parallèles aux axes, équidistantes et en même nombre pour chacun des axes. Les rectangles ω_1 sont les mailles du grillage G_1, et on les suppose fermées (c'est-à-dire englobant leurs côtés). Pour construire le grillage G_2, nous décomposons de la même façon les mailles ω_1 en un même nombre de mailles fermées ω_2, et nous continuons ainsi de suite. Les mailles du grillage G_n sont donc des rectangles fermés, ω_n, provenant de la décomposition des mailles ω_{n-1}, et dont les deux dimensions tendent vers zéro quand n tend vers l'infini.

Venons maintenant à la démonstration du théorème. Nous pouvons supposer Δ fermé, car, si E est ouvert sur Δ ouvert, il est ouvert au sens absolu et reste ouvert sur Δ fermé. Dans ce cas, les mailles ω_n qui sont fermées n'ont aucun point hors de Δ.

Soit M un point de E. Ce point appartient à une maille au moins de chacun des grillages successifs G_n. Or, M est un point intérieur; donc, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, une maille ω_n contenant M est contenue dans E. Donc E se compose des mailles de G_1 contenues dans E, des mailles de G_2 contenues dans E mais non dans les mailles précédentes, des mailles de G_3 contenues dans E mais non dans les mailles précédentes, etc.

Le théorème précédent s'étend de lui-même aux ensembles ouverts dans un espace à 3 ou à n dimensions. Voici l'énoncé :

Un ensemble spatial, E, *ouvert sur un domaine* Δ, *est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines rectangulaires fermés, non empiétants, mais pouvant avoir des frontières communes.*

Ce théorème reste vrai dans le cas linéaire : les domaines fermés se réduisent alors à des intervalles fermés. Ce résultat n'est pas en contradiction avec le théorème du numéro précédent, parce que tout intervalle ouvert est une somme d'intervalles fermés.

15. **Lemme de Borel**. — Considérons d'abord les ensembles linéaires. Ce lemme s'énonce alors comme il suit :

S'il existe une famille $\mathfrak{F}$ (dénombrable ou non) d'intervalles, telle que tout point de l'intervalle fermé (a, b) soit intérieur à l'un d'eux au moins, on peut extraire de $\mathfrak{F}$ une famille composée d'un nombre limité d'intervalles et jouissant de la même propriété : tout point de (a, b) est intérieur à l'un d'eux; en d'autres termes, on peut couvrir tout (a, b) avec un nombre limité d'intervalles de la famille $\mathfrak{F}$ [1].

---

[1] M. Borel n'avait énoncé et démontré ce théorème que pour une famille dénombrable. M. Lebesgue l'a étendu au cas général. Ce théorème intervenait implicitement dans nombre de démonstrations. Le mérite de M. Borel est de l'avoir isolé.

Ce théorème sera établi si nous démontrons qu'on peut partager (a, b) en un nombre limité de parties consécutives, chacune intérieure à un intervalle de $\mathfrak{F}$. Pour cela, divisons successivement (a, b) en $2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$ parties égales. Je dis qu'on peut assigner une valeur de n telle que chaque partie soit contenue dans un intervalle de $\mathfrak{F}$. En effet, dans le cas contraire, pour chaque valeur de n, nous pourrions assigner un intervalle correspondant, α_n, non contenu dans un intervalle de $\mathfrak{F}$ et d'amplitude indéfiniment décroissante quand n tend vers l'infini. Prenons arbitrairement un point M_n dans chaque intervalle α_n; la suite des points $M_1, M_2, \ldots$, tous dans (a, b), admet au moins un point limite M dans (a, b), en vertu du principe de Weierstrass (n° 2). Il y aurait donc un intervalle α_n, infiniment petit et infiniment voisin de M, non contenu dans un intervalle de $\mathfrak{F}$, ce qui est impossible, puisque le point M est *intérieur* à un intervalle de $\mathfrak{F}$.

Ce lemme et sa démonstration s'étendent d'eux-mêmes à l'espace. On obtient l'énoncé suivant :

Soient Δ un domaine rectangulaire fermé et $\mathfrak{F}$ une famille de domaines rectangulaires, telle que tout point de Δ soit intérieur à l'un d'eux. Alors on peut extraire de $\mathfrak{F}$ un nombre limité de domaines tels que tout point de Δ soit encore intérieur à l'un d'eux.

Plus généralement, on peut, comme nous allons le prouver, remplacer, dans cet énoncé, Δ par un ensemble fermé F et formuler le lemme ainsi qu'il suit :

Soient F un ensemble borné et fermé (au sens absolu) et $\mathfrak{F}$ une famille de domaines rectangulaires (intervalles, dans le cas linéaire) telle que tout point de F soit intérieur à l'un d'eux. Alors on peut couvrir tout F avec un nombre limité de domaines de la famille.

Soit CF le complémentaire de l'ensemble F par rapport à un domaine fermé Δ; CF est ouvert et n'admet que des points intérieurs (sur Δ), donc chaque point de CF est intérieur à un domaine rectangulaire correspondant exclu de F. Ces domaines forment une famille $\mathfrak{F}'$. Maintenant tout point de Δ est intérieur à un domaine de l'une des deux familles $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{F}'$; donc tout Δ peut

être recouvert avec un nombre limité d'entre eux, auquel cas l'ensemble F est contenu dans ceux extraits de la famille $\mathfrak{F}$, car ceux extraits de $\mathfrak{F}'$ ne contiennent aucun point de l'ensemble F.

Voici encore une autre forme utile du même lemme :

Soient F *un ensemble borné et fermé (au sens absolu), ensuite* $\mathfrak{F}$ *une famille d'ensembles ouverts* O, *telle que tout point de* F *appartienne à l'un d'eux. Alors l'ensemble* F *est contenu dans la somme d'un nombre limité de ces ensembles* O.

En effet, un point M de F, étant *intérieur* à un ensemble O qui le contient, est intérieur à un domaine ω exclu de CO. Nous dirons que cet O et cet ω se correspondent. Nous venons de prouver qu'on peut couvrir tout l'ensemble F avec un nombre limité de ces ω. Mais alors tout l'ensemble F est *a fortiori* recouvert par les ensembles O correspondants.



CHAPITRE II.

MESURE DES ENSEMBLES ET FONCTIONS MESURABLES.

I. — Ensembles mesurables.

16. Considérations préliminaires. — La mesure des grandeurs repose sur un axiome fondamental : *le tout est la somme des parties*. Si une grandeur se partage en parties de même espèce, la mesure du tout sera la somme des mesures des parties. Euclide, qui a formulé cet axiome, a fondé sur lui la théorie de la mesure des figures de la géométrie élémentaire et tous ses successeurs ont fait de même [1].

Toute généralisation de la théorie de la mesure, telle la mesure des ensembles, doit donc se proposer comme première condition de respecter le principe précédent.

La mesure d'un ensemble E est un nombre, *positif ou nul*, attaché à cet ensemble et qui en dépend. On exprime cette correspondance en disant que la mesure est une *fonction de l'ensemble* E. D'après ce qui précède, cette fonction doit satisfaire à deux conditions essentielles :

1° Elle doit être *additive*, c'est-à-dire que la mesure d'une somme d'ensembles sans point commun deux à deux doit être la somme des mesures des parties.

2° Elle doit se réduire à la mesure au sens élémentaire dans le cas des figures élémentaires, segment, rectangle, etc.

La première de ces deux conditions, l'*additivité*, peut être étendue de deux manières : une fonction est *additive au sens restreint* si elle n'est additive que pour un nombre fini de termes ; elle est *additive au sens complet* si elle est encore additive pour une infinité dénombrable de termes.

---

[1] Pour définir la mesure des figures géométriques, il faut au principe précédent joindre celui-ci : des figures égales (superposables) ont même mesure.

Le progrès essentiel obtenu par MM. Borel et Lebesgue dans la théorie de la mesure, est d'avoir réalisé l'additivité *au sens complet*. Toute la supériorité de leur théorie vient de là. Il importe toutefois de dire que la première idée de cette théorie revient à M. Borel ([1]). L'œuvre propre de M. Lebesgue ne commence qu'avec les intégrales définies ([2]).

Nous nous proposons maintenant de montrer que les deux conditions que nous venons de préciser, en y ajoutant celle d'être non négative, suffisent pour définir la mesure des ensembles auxquels M. Lebesgue a donné le nom d'*ensembles mesurables*.

Il y a lieu d'étudier tout d'abord les ensembles sommes d'intervalles (dans le cas linéaire), ou sommes de domaines rectangulaires (dans le cas général). Cette étude repose sur un lemme préliminaire.

17. **Lemme.** — *Si un ensemble linéaire borné peut être considéré de deux manières différentes comme la somme d'une infinité dénombrable d'intervalles non empiétants, la somme des mesures de ces intervalles est la même dans les deux cas.*

Désignons par α_i les intervalles de la première somme et par β_k ceux de la seconde. Ces intervalles peuvent être ouverts ou fermés, et deux intervalles d'une même somme peuvent avoir une extrémité commune. Nous n'excluons pas le cas limite où un intervalle α_i ou β_k se réduit à un seul point. Ainsi un point est considéré comme un intervalle *fermé* de mesure nulle.

Désignons par $m\alpha_i$ et $m\beta_k$ les mesures de ces intervalles et supposons, par impossible, que l'on ait

$$\sum_1^\infty m\alpha_i > \sum_1^\infty m\beta_k.$$

Nous aurons encore, pour une valeur suffisamment grande de n,

$$\sum_1^n m\alpha_i > \sum_1^\infty m\beta_k.$$

([1]) *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898.
([2]) *Thèse*, 1902.

Donnons-nous une série positive $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ de somme inférieure à la demi-différence des deux membres de cette inégalité. Associons à chaque α_i un intervalle *fermé* $\alpha'_i \leq \alpha_i$ et à chaque β_k un intervalle β'_k contenant β_k dans son *intérieur*, tels que l'on ait

$$m\alpha_i - m\alpha'_i < \varepsilon_i \quad \text{et} \quad m\beta'_k - m\beta_k < \varepsilon_k;$$

nous aurons encore

$$\sum_1^n m\alpha'_i > \sum_1^\infty m\beta'_k.$$

Mais ceci est impossible, en vertu du lemme de Borel (n° 15). En effet, tout point d'un α'_i est *intérieur* à un intervalle β'_k. Donc les n premiers α'_i peuvent, étant *fermés*, être recouverts par un nombre limité de β'_k. La somme des mesures de ces β'_k surpasse donc celle des mesures des n premiers α'_i et la somme des mesures de tous les β'_k la surpasse *a fortiori*, ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente.

18. **Mesure des ensembles sommes d'intervalles.** — Nous allons considérer ici et représenter avec les notations $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ... des ensembles supposés sommes d'intervalles et tous compris dans un intervalle (a, b) comme dans le cas précédent. Ces intervalles, ouverts ou fermés, sont supposés non empiétants, mais peuvent avoir une extrémité commune. Ils peuvent éventuellement se réduire à des points. Voici d'abord la définition de la mesure des ensembles de cette espèce :

La mesure $m\mathcal{E}$ *d'un ensemble* $\mathcal{E}$ *est la somme des mesures des intervalles* α *qui le composent.*

$$m\mathcal{E} = \Sigma m\alpha.$$

Cette définition est imposée par la condition additive. Elle est légitime, en vertu du lemme précédent, car le résultat est le même pour toute décomposition de $\mathcal{E}$.

La mesure des ensembles $\mathcal{E}$ jouit des propriétés suivantes :

1° *Selon que des ensembles* $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ... *empiètent ou n'em-*

piètent pas, on a le droit d'écrire l'une des deux relations

$$m(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots) \leqq m\mathcal{E}_1+m\mathcal{E}_2+\ldots,$$
$$m(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots) = m\mathcal{E}_1+m\mathcal{E}_2+\ldots.$$

En effet, la totalité des intervalles qui composent les ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ... est dénombrable et nous pouvons les ranger dans une suite unique α_1, α_2, ... Les intervalles α ne peuvent empiéter qu'à la condition de provenir de deux ensembles $\mathcal{E}$ empiétants. Considérons d'abord une somme finie d'intervalles. Dans ce cas nous avons, sans aucune difficulté, selon qu'il y a ou qu'il n'y a pas d'empiètements,

$$m\sum_1^n \alpha_k \leqq \sum_1^n m\alpha_k, \qquad m\sum_1^n \alpha_k = \sum_1^n m\alpha_k.$$

Faisons tendre n vers l'infini. Observons que la somme des n premiers intervalles α_k, qui peuvent empiéter, se réduit à une somme d'intervalles β non empiétants, et que l'addition d'un nouvel intervalle α_{n+1} revient à celle d'un certain nombre d'intervalles β n'empiétant pas. Nous pouvons donc appliquer le lemme précédent, de sorte que les deux relations que nous venons d'écrire ont pour limites les deux relations à démontrer.

2° *Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont des points communs, on a*

$$m\mathcal{E}_1+m\mathcal{E}_2 = m(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)+m(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2).$$

Soient a_n et b_n des sommes d'un nombre fini d'intervalles (pouvant encore se réduire à des points); ces intervalles, dont le nombre croît avec n, embrassent progressivement tout $\mathcal{E}_1$ et tout $\mathcal{E}_2$ quand n tend vers l'infini. Alors a_n+b_n et $a_n b_n$ sont des sommes de même nature qui embrassent $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ quand n tend vers l'infini. On a, sans difficulté, pour un nombre fini d'intervalles,

$$ma_n+mb_n = m(a_n+b_n)+m(a_n b_n),$$

et cette équation tend vers la précédente quand n tend vers l'infini.

19. Mesure des ensembles ouverts et fermés. — Nous allons

maintenant considérer des ensembles linéaires, ouverts ou fermés sur un intervalle (a, b), par rapport auquel nous prendrons les complémentaires. Nous désignerons les ensembles ouverts avec la lettre O, et les fermés avec la lettre F. Les ensembles O sont des sommes d'intervalles ; ils rentrent dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}$ du numéro précédent et nous pouvons leur appliquer les résultats acquis.

La mesure d'un ensemble ouvert O *est la somme des mesures des intervalles non empiétants qui le composent.*

1° *On a, selon que les ensembles* O_1, O_2, ... (*en nombre fini ou infini*) *empiètent ou non,*

(1) $$m(O_1 + O_2 + \ldots) \leq mO_1 + mO_2 + \ldots,$$

(2) $$m(O_1 + O_2 + \ldots) = mO_1 + mO_2 + \ldots.$$

2° *Si deux ensembles* O_1, O_2 *empiètent, on a*

(3) $$mO_1 + mO_2 = m(O_1 + O_2) + m(O_1 O_2).$$

Passons maintenant aux ensembles fermés F.

La mesure d'un ensemble fermé F *est le complément de la mesure de son complémentaire,* CF, *qui est un* O, *c'est-à-dire que l'on a*

$$mF = b - a - mCF.$$

Cette définition est imposée par la propriété additive et, par conséquent, ne peut être en contradiction avec la précédente si F est une somme d'intervalles.

Nous obtenons les propositions suivantes :

3° *Si les ensembles* F_1 *et* F_2 *empiètent, on a*

$$mF_1 + mF_2 = m(F_1 + F_2) + m(F_1 F_2).$$

En effet, les complémentaires de F_1 et F_2 sont des ensembles ouverts O_1 et O_2 ; ceux de $F_1 + F_2$ et $F_1 F_2$ sont alors $O_1 O_2$ et $O_1 + O_2$. L'équation précédente revient donc à l'équation (3) par définition de la mesure des ensembles fermés.

4° En particulier, si les deux ensembles F_1 et F_2 sont sans point commun, $F_1 F_2$ étant nul, il vient

$$m(F_1 + F_2) = mF_1 + mF_2.$$

On en conclut, de proche en proche, que *la mesure est additive pour tout nombre fini d'ensembles fermés non empiétants.*

5° *Si un ensemble* O *contient un* F, O — F *est ouvert et l'on a*

$$(4) \qquad m(\mathrm{O} - \mathrm{F}) = m\mathrm{O} - m\mathrm{F}.$$

En effet, considérons la relation entre les complémentaires

$$\mathrm{C}(\mathrm{O} - \mathrm{F}) = \mathrm{CO} + \mathrm{F}.$$

Au second membre, les deux ensembles sont fermés et sans point commun. Il vient donc, par la règle précédente,

$$m\,\mathrm{C}(\mathrm{O} - \mathrm{F}) = m\,\mathrm{CO} + m\,\mathrm{F}.$$

Cette équation revient à (4) par définition de la mesure des ensembles fermés C(O — F) et CO.

La relation prouve que si $\mathrm{O} > \mathrm{F}$, on a $m\mathrm{O} \geqq m\mathrm{F}$.

6° *Tout ensemble ouvert* O *contient un ensemble fermé* F *de mesure infiniment voisine de la sienne.*

En effet, O est une somme d'intervalles fermés α_k (n° 14) et sa mesure est la somme des mesures de ces intervalles. La somme des n premiers intervalles est un ensemble fermé F_n dont la mesure tend vers celle de O.

7° *Réciproquement, tout ensemble* F *est contenu dans un ensemble* O *de mesure infiniment voisine de la sienne.*

Cette propriété revient à la précédente par la considération du complémentaire O′ de F. Celui-ci contient un F′, dont le complémentaire est un O contenant F. On a d'ailleurs

$$m\,\mathrm{O}' - m\,\mathrm{F}' = m\,\mathrm{O} - m\,\mathrm{F}.$$

Il suit de là, en tenant compte de 5°, que *la mesure d'un ensemble fermé* F *est la borne inférieure de la mesure des ensembles* O *qui le contiennent.*

20. Extension à l'espace. — Les considérations sur les ensembles linéaires contenues dans les numéros précédents s'étendent d'elles-mêmes à l'espace. Il suffit de remplacer le mot *intervalle* par *domaine* et le mot *extrémité* par *frontière.*

La mesure d'un ensemble ouvert O *est la somme des mesures des domaines rectangulaires qui le constituent.*

La mesure d'un ensemble fermé F *est le complément de la mesure du complémentaire, qui est un* O. *Elle est aussi la borne inférieure de la mesure de tous les* O *contenant* F.

On peut appliquer aux O et aux F toutes les formules du numéro précédent.

21. Ensembles mesurables. — Soit Δ un domaine borné rectangulaire d'un nombre quelconque de dimensions (un intervalle dans le cas linéaire).

Considérons un ensemble E dans Δ.

La mesure extérieure de E, $m_e E$, *est la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts* O *contenant* E.

La mesure intérieure de E, $m_i E$, *est la borne supérieure des mesures des ensembles fermés* F *contenus dans* E [1].

En vertu de la proposition 5° du n° 19, la mesure intérieure ne peut surpasser la mesure extérieure, car si l'on a $O > E > F$, on a $mO \geq mF$.

Nous utiliserons les propriétés suivantes de la mesure extérieure :

1° *Si* $E_1 > E_2$, *on a* $m_e E_1 \geq m_e E_2$.

En effet, tout ensemble ouvert contenant E_1 contient E_2.

2° *On a, quel que soit le nombre de termes fini ou infini, mais tous les termes étant compris dans le domaine* Δ,

$$m_e(E_1 + E_2 + \ldots) \leq m_e E_1 + m_e E_2 + \ldots.$$

En effet, soient $O_1, O_2, \ldots$ des ensembles ouverts contenant $E_1, E_2, \ldots$; alors $(O_1 + O_2 + \ldots)$ est ouvert et contient $(E_1 + E_2 + \ldots)$; il vient donc (n° 19)

$$m_e(E_1 + E_2 + \ldots) \leq m(O_1 + O_2 + \ldots) \leq mO_1 + mO_2 + \ldots.$$

On peut remplacer $mO_1, mO_2, \ldots$ par leurs bornes inférieures $m_e E_1, m_e E_2, \ldots$; on trouve la formule à démontrer.

---

(1) Les définitions de M. Lebesgue sont formulées en termes différents, mais sont équivalentes aux précédentes.

La mesure d'un ensemble ne peut être une fonction additive et non négative qu'à la condition d'être intermédiaire entre les mesures intérieure et extérieure. Elle est donc déterminée si ces deux mesures coïncident et l'on dit alors, avec M. Lebesgue, que l'ensemble est *mesurable*. Nous avons donc la définition suivante :

Un ensemble mesurable E *est un ensemble dont les mesures extérieure et intérieure ont la même valeur, et cette valeur est la mesure de* E, mE.

Nous pouvons aussi énoncer la règle suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E *soit mesurable est qu'à tout* ε *positif donné, on puisse faire correspondre deux ensembles* O *et* F, *ouvert et fermé, tels qu'on ait*

$$O > E > F, \qquad mO - mF < \varepsilon.$$

La mesure de E *est la limite commune de celles de* O *et de* F *quand* ε *tend vers zéro.*

D'après cela, *si* E *est mesurable, son complémentaire l'est aussi*, car on tire des relations précédentes, celles-ci :

$$CF > CE > CO, \qquad mCF - mCO < \varepsilon,$$

qui expriment que CE est mesurable.

Remarquons enfin qu'*un ensemble ouvert* O *est mesurable*, car il est contenu en lui-même et contient un F de mesure infiniment voisine (n° 19, 6°). *Un ensemble fermé* F *est mesurable* comme complémentaire d'un O.

22. Nouveau critérium de mesurabilité. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit mesurable est que, quel que soit* ε *positif donné, on puisse décomposer* E *dans la somme*

$$E = F + e,$$

d'un ensemble fermé F *et d'un ensemble* e *de mesure extérieure* $< \varepsilon$. *La mesure de* E *est limite de celle de* F *quand* ε *tend vers zéro.*

Cette condition est suffisante, car, si elle a lieu, on a, par la propriété [illegible] de la mesure extérieure (n° **21**),

$$m_e E - m F < \varepsilon.$$

D'ailleurs, la mesure intérieure vaut au moins mF par définition; donc les deux mesures de E sont infiniment voisines.

Cette condition est nécessaire, car si E est mesurable, il existe deux ensembles O et F tels qu'on ait

$$O \geq E \geq F, \qquad mO - mF < \varepsilon;$$

auquel cas, on peut poser

$$E = F + e, \qquad e \leq O - F.$$

Or, O — F est ouvert; il vient donc (n° **19**, 5°)

$$m_e e \leq m(O - F) = mO - mF < \varepsilon.$$

23. Sommes et produits d'ensembles mesurables. — Nous allons vérifier, en nous servant du critérium précédent, que le caractère de mesurabilité se conserve dans les opérations sur les ensembles, et, en particulier, que la mesure satisfait à la loi additive que nous nous sommes proposés de réaliser.

1° *Les somme et produit, finis ou infinis, d'ensembles mesurables, contenus dans le domaine Δ, sont mesurables.*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ des ensembles mesurables, en nombre fini ou infini. Faisons-leur correspondre une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de somme inférieure à un nombre ε donné. Nous pouvons, pour chaque indice n, faire la décomposition prévue dans le critérium précédent :

$$E_n = F_n + e_n, \qquad m_e e_n < \varepsilon_n.$$

Considérons d'abord le produit de ces ensembles :

$$E_1 E_2 \ldots E_n \ldots = (F_1 + e_1)(F_2 + e_2) \ldots (F_n + e_n) \ldots$$

Un point de ce produit, s'il n'appartient pas à tous les F_n appartient à un e_n au moins, de sorte que nous pouvons poser

$$E_1 E_2 \ldots = F_1 F_2 \ldots + e, \qquad e \leq e_1 + e_2 + \ldots$$

C'est là précisément la décomposition qui prouve que le produit est mesurable, car $F_1 F_2 \ldots$ est fermé et l'on a

$$m_e e < m_e e_1 + m_e e_2 + \ldots < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots = \varepsilon.$$

Considérons maintenant la somme $E_1 + E_2 + \ldots$ des ensembles; elle est mesurable aussi, parce que l'ensemble complémentaire est un produit, ce qui ramène au cas précédent.

2° *Si les ensembles mesurables* $E_1, E_2, \ldots$ *en nombre fini ou infini, tous contenus dans le domaine* Δ, *sont sans point commun deux à deux, on a*

$$m(E_1 + E_2 + \ldots) = m E_1 + m E_2 + \ldots.$$

La mesure est donc une fonction d'ensemble complètement additive.

Considérons d'abord la somme $E_1 + E_2$ de deux termes seulement. Faisons les décompositions

$$E_1 = F_1 + e_1, \qquad E_2 = F_2 + e_2,$$

d'où

$$E_1 + E_2 = (F_1 + F_2) + (e_1 + e_2).$$

Quand e_1 et e_2 sont de mesures extérieures infiniment petites, $e_1 + e_2$ l'est aussi (nº **21**, 2°). Alors les mesures de E_1 et de E_2 sont les limites de celles de F_1 et de F_2; de même, celle de $E_1 + E_2$ est limite de celle de $F_1 + F_2$. Mais les deux ensembles fermés F_1 et F_2 sont sans point commun; on a donc (nº **19**, 4°)

$$m(F_1 + F_2) = m F_1 + m F_2;$$

et, à la limite,

$$m(E_1 + E_2) = m E_1 + m E_2.$$

Ainsi la mesure est additive pour deux ensembles mesurables et, par conséquent, pour toute somme finie de tels ensembles.

Considérons, en second lieu, une somme infinie $E_1 + E_2 + \ldots$. Nous savons déjà qu'elle est mesurable. La propriété 2° de la mesure extérieure (nº **21**) nous donne une première inégalité

$$m(E_1 + E_2 + \ldots) \leq m E_1 + m E_2 + \ldots.$$

Nous allons en chercher une autre en sens inverse. Posons

$$E_1 + E_2 + \ldots = (E_1 + E_2 + \ldots + E_n) + R_n.$$

L'ensemble $R_n = E_{n+1} + E_{n+2} + \dots$ est mesurable, et, la loi additive s'appliquant aux sommes finies, il vient

$$m(E_1 + E_2 + \dots) = mE_1 + mE_2 + \dots + mE_n + mR_n$$
$$\geq mE_1 + mE_2 + \dots + mE_n.$$

Pour $n = \infty$, cette inégalité est de sens contraire à la précédente et, par conséquent, l'égalité seule est possible. Il vient donc

$$m(E_1 + E_2 + \dots) = mE_1 + mE_2 + \dots.$$

3° *La différence de deux ensembles mesurables est mesurable et si $E_1 > E_2$, on a*

$$m(E_1 - E_2) = mE_1 - mE_2.$$

Cette règle revient à celle de l'addition par la considération des complémentaires; on obtient la relation

$$mC(E_1 - E_2) = m(CE_1 + E_2) = mCE_1 + mE_2,$$

qui entraîne la précédente.

4° *Tout ensemble dénombrable de points est de mesure nulle.*

Un point est un ensemble fermé de mesure nulle; donc, par la propriété additive, tout ensemble somme de points est aussi de mesure nulle.

Ceci prouve qu'*un intervalle, n'étant pas de mesure nulle, contient une infinité non dénombrable de points*. En particulier, les points ou les nombres de l'intervalle $(0, 1)$ forment un ensemble non dénombrable (n° 1).

24. Mesures d'ensembles limites. — *Si l'on considère une suite illimitée d'ensembles mesurables satisfaisant aux conditions $E_1 < E_2 < E_3 < \dots$, on a*

$$\lim_{n=\infty} mE_n = m(E_1 + E_2 + \dots).$$

Si, au contraire, $E_1 > E_2 > E_3 > \dots$, on a

$$\lim_{n=\infty} mE_n = m(E_1E_2\dots).$$

Ces deux résultats rentrent l'un dans l'autre par les complémen-

taires. Il suffit de prouver le premier. On a

$$E_1 + E_2 + \ldots = E_1 + (E_2 - E_1) + \ldots + (E_n - E_{n-1}) + \ldots.$$

Chaque E_n contenant le précédent, le second membre est une somme d'ensembles sans point commun deux à deux; on a, par la loi additive,

$$m(E_1 + E_2 + \ldots) = m E_1 + (m E_2 - m E_1) + \ldots + (m E_n - m E_{n-1}) + \ldots.$$

C'est, sous une autre forme, la formule à démontrer.

Les deux règles précédentes sont des cas particuliers de la règle générale suivante [1] :

Si une suite illimitée d'ensembles mesurables $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *a une limite unique* E, *cette limite est mesurable et l'on a*

$$m E = \lim (m E_n).$$

En effet, considéré comme plus petite limite, E est la somme des ensembles $E_n E_{n+1} \ldots$, et considéré comme plus grande limite le produit des ensembles $(E_n + E_{n+1} + \ldots)$ où $n = 1, 2, 3, \ldots$. Il vient, respectivement, par l'une des deux règles précédentes,

$$m E = \lim_{n=\infty} m(E_n E_{n+1} \ldots) \leqq \lim_{n=\infty} m E_n,$$
$$m E = \lim_{n=\infty} m(E_n + E_{n+1} + \ldots) \geqq \lim_{n=\infty} m E_n,$$

ce qui prouve la proposition.

2. — Fonctions mesurables.

25. Définition des fonctions mesurables. — Soient $x, y, \ldots$ les coordonnées d'un point P, variable dans un ensemble mesurable E. Soit $f(x, y, \ldots)$ ou, plus simplement, $f(P)$ une fonction de $x, y, \ldots$ ou du point P. Nous supposerons que cette fonction est *univoque*, c'est-à-dire qu'elle admet, en chaque point de E, une valeur unique, finie ou infinie de signe déterminé [2].

---

[1] De la Vallée Poussin, Mémoire cité.

[2] Une fonction qui ne prend pas de valeurs infinies est dite *finie*. Elle est *infinie* dans le cas contraire. Il faut remarquer qu'une fonction finie n'est pas pour cela *bornée*.

Convenons de désigner respectivement par $E(f \geqq A)$, $E(f < A)$, ... les ensembles de points de E où f satisfait à la condition indiquée dans la parenthèse. La définition des fonctions mesurables a été donnée par M. Lebesgue dans sa Thèse. On peut la formuler comme il suit :

La fonction $f(P)$ est mesurable dans E, si l'un au moins des quatre ensembles

$$E(f \geqq A), \quad E(f < A), \quad E(f > A), \quad E(f \leqq A),$$

est mesurable quel que soit A constant, auquel cas ils sont mesurables, quel que soit A, tous les quatre.

Les quatre conditions sont effectivement équivalentes. Les deux premières sont équivalentes, parce que les deux ensembles y relatifs sont complémentaires, et les deux dernières le sont aussi pour la même raison. Il suffit donc de montrer que les deux premières conditions sont équivalentes aux deux dernières, ce qui aura évidemment lieu si les unes et les autres entraînent la mesurabilité de $E(f = A)$. Tirons, par exemple, cette conséquence des deux premières conditions. L'ensemble $E(f = A)$ est mesurable, car c'est la partie commune à l'ensemble $E(f \geqq A)$ et à toute la suite des ensembles $E\left(f < A + \frac{1}{n}\right)$, où n parcourt la série des valeurs entières 1, 2, 3, ...

Il suffit pour que f soit mesurable que l'un des quatre ensembles, par exemple $E(f \geqq a)$, soit mesurable pour toutes les valeurs rationnelles de A.

Un nombre irrationnel A peut être défini comme limite d'une suite rationnelle décroissante $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Or, l'ensemble $E(f > A)$ est la somme de tous les ensembles $E(f \geqq A_n)$. Si ceux-ci sont mesurables, leur somme l'est aussi.

On considère le plus souvent des fonctions mesurables dans un domaine rectangulaire (un intervalle, dans le cas linéaire) ou même dans tout l'espace. On ramène d'ailleurs tous les cas à celui-là. Si f est mesurable dans E mesurable, cette fonction sera mesurable dans un domaine quelconque en la posant nulle dans CE. Réciproquement, si une fonction est mesurable dans un

domaine contenant l'ensemble E mesurable, elle sera mesurable sur E, car les produits d'ensembles mesurables sont mesurables.

26. Propriétés des fonctions mesurables. — 1° *Soit a une constante; si f est mesurable, $a+f$ et af, en particulier $-f$, le sont aussi.*

C'est immédiat.

2° *Si f et φ sont deux fonctions finies et mesurables, l'ensemble* $E(f>\varphi)$ *est mesurable.*

Si f est fini et $>\varphi$, on peut assigner un nombre rationnel r intermédiaire entre eux, et réciproquement. Donc l'ensemble $E(f>\varphi)$, des points où f est $>\varphi$ est mesurable, car c'est la somme de tous les produits

$$E(f>r)\,E(\varphi<r),$$

dans lesquels r parcourt l'infinité dénombrable des nombres rationnels.

3° *Si f et φ sont finies et mesurables, $f+\varphi$ et $f-\varphi$ le sont aussi.*

On a, en effet,

$$E(f\pm\varphi>A)=E(f>A\mp\varphi).$$

Mais la fonction $A\mp\varphi$ est mesurable (1°) et, par conséquent, ce dernier ensemble l'est aussi (2°).

4° *Si f et φ sont finies et mesurables, $f\varphi$ l'est aussi.*

D'abord f^2 est mesurable, car, A pouvant être supposé non négatif, on a

$$E(f^2\geqq A)=E(f\geqq\sqrt{A})+E(f\leqq-\sqrt{A}).$$

Le cas général se ramène au précédent par la formule

$$4f\varphi=(f+\varphi)^2-(f-\varphi)^2.$$

27. Limites de fonctions mesurables. — 1° *Soit une suite dénombrable de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ mesurables, finies*

ou infinies [1]. *Abstraction faite de l'ordre, cette suite admet, en chaque point* P, *une borne supérieure et une borne inférieure (finies ou infinies). Ces bornes, fonctions de* P, *sont mesurables.*

Considérons, par exemple, la borne supérieure Φ ; elle est mesurable, parce que l'ensemble $E(\Phi > A)$ est la somme de tous les ensembles $E(f_n > A)$.

2° *Toute limite (finie ou infinie) d'une suite monotone (c'est-à-dire non croissante ou non décroissante) de fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *mesurables (finies ou infinies)* [2], *est mesurable.*

En effet, la limite d'une suite monotone est l'une des bornes de l'ensemble des fonctions.

3° *Les plus grande et plus petite limites d'une suite de fonctions mesurables (finies ou infinies)* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *sont mesurables.*

Considérons, par exemple, la plus grande limite Φ. C'est la limite de la suite monotone $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, où φ_n est la borne supérieure de l'ensemble $f_n, f_{n+1}, \ldots$. Donc φ_n et Φ sont mesurables par les règles précédentes.

4° *Toute fonction limite (unique) de fonctions mesurables est mesurable.*

En effet, une fonction limite unique est toujours limite d'une suite *dénombrable* de fonctions, ce qui ramène au cas précédent.

28. Limites de fonctions dépendant d'un paramètre continu. — Soient P un point $x, y, \ldots$ variable dans un ensemble mesurable E, et t un paramètre variable dans un intervalle (a, b). Considérons une fonction univoque, $f(P, t)$, dépendant de $x, y, \ldots$ et de t. Nous avons la règle suivante :

---

(1) Voir la note précédente.

(2) Une suite illimitée de valeurs infinies de même signe est considérée comme monotone et a pour limite l'infini de ce même signe, par définition.

Si f est mesurable sur E pour chaque valeur particulière de $t > a$, et continue sur (a, b) pour chaque point particulier P, alors les plus grande et plus petite limites de f quand t tend vers a sont des fonctions mesurables de P sur E.

Considérons, par exemple, la plus grande limite. C'est la limite pour $\varepsilon = 0$ de la borne supérieure de l'ensemble des valeurs au point P de la fonction f de t quand t varie dans l'intervalle $(a, a + \varepsilon)$. A cause de la continuité en t, on ne change pas cette borne en se limitant aux seules valeurs rationnelles de t dans l'intervalle $(a, a + \varepsilon)$. Mais cet ensemble est dénombrable, donc la borne de f dans cet ensemble est mesurable (par la règle 1° du numéro précédent) et alors sa limite l'est aussi.

La règle s'étend d'elle-même au cas où t tend vers b ou vers un autre point quelconque de (a, b).

3. — Ensembles et fonctions mesurables (B).

29. Ensembles mesurables (**B**). — Les ensembles mesurables les plus simples sont les domaines rectangulaires fermés : intervalle, rectangle, ..., selon le nombre de dimensions de l'espace considéré. Tous les ensembles que l'on peut construire à partir de ceux-là par additions, soustractions et multiplications, finies ou infinies, sont donc mesurables aussi, en vertu des théorèmes précédents. Ces ensembles, les seuls qui aient été considérés au début par M. Borel, ont été désignés par M. Lebesgue sous le nom d'*ensembles mesurables* (B).

Si un ensemble est mesurable (B), *son complémentaire l'est aussi*, comme différence de deux ensembles de cette nature.

Les ensembles ouverts et les ensembles fermés sont mesurables (B). En effet, les ensembles ouverts sont des sommes de domaines rectangulaires fermés (n° 14), et les ensembles fermés sont complémentaires des précédents.

Les sommes, différences, produits et limites d'ensembles mesurables (B) *sont mesurables* (B), par définition même.

30. Théorème. — *Tout ensemble* E, *mesurable, est intermédiaire entre deux ensembles mesurables* (B) *de même mesure*

que lui, E_1 *et* E_2 : *donc tels qu'on ait*

$$E_1 < E < E_2, \qquad mE_1 = mE = mE_2.$$

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite positive, tendant vers zéro. A chacun de ces nombres ε_n faisons correspondre deux ensembles O_n et F_n, l'un ouvert, l'autre fermé, satisfaisant aux conditions

$$F_n < E < O_n, \qquad mO_n - mF_n < \varepsilon_n.$$

Les deux ensembles mesurables (B)

$$E_1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots, \qquad E_2 = O_1 O_2 \ldots O_n \ldots$$

sont de même mesure que E, et l'on a

$$E_1 \leq E \leq E_2.$$

31. **Fonctions mesurables (B).** — Soit $f(P)$ une fonction mesurable dans un domaine rectangulaire Δ. On sait que, dans ce cas, les ensembles

$$E(f \geq A), \qquad E(f \leq A), \qquad E(f > A), \qquad E(f < A)$$

sont mesurables quel que soit A (n° 25).

Si ces ensembles sont, en outre, mesurables (B), M. Lebesgue dit que f est *mesurable* (B) *dans* Δ. Un raisonnement pareil à celui du n° 25 prouve d'ailleurs que si l'un des quatre ensembles est mesurable (B) quel que soit A, les trois autres le sont aussi.

Soit E un ensemble mesurable (B) dans un domaine Δ ; par définition, une fonction f est *mesurable* (B) *sur* E si elle est mesurable (B) dans Δ quand on la pose nulle dans CE.

On peut, dans tous les théorèmes énoncés précédemment sur les fonctions mesurables, remplacer le mot « mesurable » par « mesurable (B) ». C'est la conséquence immédiate de la remarque qui termine le n° 29. Bien entendu, il faut avoir soin de faire la substitution partout. En particulier, les *sommes*, *différences*, *produits et limites de fonctions mesurables* (B) *sont mesurables* (B).

La fonction caractéristique φ *d'un ensemble* E *mesurable* (B) *est mesurable* (B), car l'ensemble $E(\varphi \geq A)$ est identique à E si A est ≤ 1, et il est nul dans le cas contraire.

32. **Théorème.** — *Une fonction f bornée et mesurable est intermédiaire entre deux fonctions mesurables* (B) *qui ne diffèrent de f que sur un ensemble de mesure nulle.*

Supposons f positif, ce qui est permis, car on peut au besoin lui ajouter une constante. Désignons par f_n une fonction égale en chaque point à la plus grande fraction de dénominateur n contenue dans f (qui peut être o). Cette fonction est mesurable et ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes. Nous pouvons former le développement en série

$$f = f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_n - f_{n-1}) + \ldots.$$

Chaque terme est une fonction mesurable, non négative, susceptible seulement d'un nombre limité de valeurs différentes. Écartons toute fonction négative : il suffit de démontrer le théorème pour chaque terme; donc, pour une fonction prenant respectivement des valeurs a_1, a_2, ..., a_k (autres que o) dans des ensembles de caractéristiques φ_1, φ_2, ..., φ_k. Une telle fonction a pour expression

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_k \varphi_k.$$

Il suffit encore de démontrer le théorème pour chaque terme; donc pour la caractéristique φ d'un ensemble mesurable, auquel cas le théorème est le même qu'au n° 30.

4. — Classification des fonctions et des ensembles mesurables (B). Classes de Baire.

33. **Classes de Baire.** - Nous nous proposons de montrer que l'ensemble des fonctions mesurables (B) se confond avec l'ensemble de celles qui rentrent dans les classes que M. Baire a définies dans sa Thèse (1899).

Voici d'abord la classification due à M. Baire :

Les fonctions continues constituent la classe o; les fonctions discontinues limites (finies ou infinies) de fonctions continues [1]

---

[1] M. Baire n'a, en fait, considéré dans sa Thèse que des limites finies, mais cette restriction serait gênante et M. Baire l'a écartée ultérieurement; nous admettons que les fonctions peuvent être infinies de signe déterminé.

constituent la classe 1; les limites de fonctions de classe 1, qui ne sont pas de classe 1 ni de classe 0, constituent la classe 2, et ainsi de suite. On définit de la sorte des classes de tous les ordres entiers 0, 1, 2, ..., n, ..., et chacune de ces classes est d'*ordre fini*.

Maintenant on conçoit qu'une fonction soit limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de classes finies, mais indéfiniment croissantes avec n, et n'appartienne à aucune des classes précédentes. Cette limite appartient alors à une première classe *transfinie* ω. Les classes antérieures étaient immédiatement précédées d'une autre : elles sont *de première espèce*; celle-ci, au contraire, n'a pas de précédente immédiate : elle est *de deuxième espèce*.

La classe ω est suivie des classes $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots$ de première espèce. Après toutes celles-ci vient une nouvelle classe de deuxième espèce ω_2, et l'on continue ainsi de suite *transfiniment*, c'est-à-dire aussi loin que l'on peut concevoir l'application du procédé. Nous démontrerons, en terminant ces leçons, que ces classes ne rentrent pas les unes dans les autres et qu'il existe effectivement des fonctions dans chacune d'elles.

Les nombres qui désignent les classes de Baire, et dont la génération des classes fait connaître le mode de construction, constituent la *suite des nombres transfinis*, plus étendue que celle des entiers naturels.

Deux principes servent à la construction de la suite des nombres transfinis; la construction de la suite des entiers naturels n'utilise que le premier. Ces deux principes sont les suivants :

1° *Après tout nombre, il y en a un autre;*

2° *Après toute suite illimitée de nombres croissants*

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n, \ldots,$$

il y a un premier nombre supérieur à toute la suite.

L'existence des classes de fonctions, qui sera établie à la fin de ces leçons, prouve que ces principes ne comportent pas de contradiction.

La *démonstration par récurrence* s'applique aux nombres transfinis. Un théorème est vrai pour tous les nombres transfinis

s'il est vrai pour le nombre 1 et s'il subsiste pour α (de première ou de deuxième espèce) à condition d'être vrai pour les nombres $< \alpha$ [1].

34. **Propriétés des fonctions de Baire.** — Nous appellerons *fonctions de Baire* celles qui rentrent dans les classes précédentes [2]. Nous y reviendrons dans la dernière partie de ces leçons, mais il importe dès maintenant d'en établir les propriétés les plus simples.

1° *On n'élève pas la classe d'une fonction en bornant la fonction à deux nombres a et b* ($a < b$).

Voici ce qu'il faut entendre par là : Désignons par $[f]_a^b$ une fonction égale à f tant que f est compris dans l'intervalle (a, b), mais égale à a si f est $< a$ et à b si f est $> b$. Cette fonction, c'est la fonction f *bornée à a et b*; *borner f à a et b*, c'est substituer $[f]_a^b$ à f. Passons à la démonstration du théorème.

Le théorème est exact pour la classe 0. Montrons qu'il subsiste pour la classe α, s'il est déjà prouvé pour les classes antérieures. C'est immédiat : si f est limite de fonctions f_n de classes antérieures à α, f bornée à a et b est limite des f_n bornées à a et b et (le théorème s'appliquant) de classes antérieures à α.

Voici deux conséquences de ce théorème :

Une fonction bornée de classe α est limite de fonctions des classes antérieures ayant les mêmes bornes.

Toute fonction de classe α est limite de fonctions bornées des classes antérieures.

En effet, si f est, pour $n = \infty$, limite de f_n de classe $< \alpha$ et, si f est bornée à a et b, f est aussi limite de f_n bornée aux mêmes nombres; si f n'est pas bornée, f est limite de f_n bornée à $-n$ et $+n$.

2° *La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions*

---

(1) Pour plus de détails sur les nombres transfinis, il convient de lire le Chapitre II des *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (Collection Borel, 1905).

(2) M. Lebesgue les appelle *fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 1905).

de Baire, finies et de classes $\leqq \alpha$, *sont des fonctions de Baire de classes* $\leqq \alpha$.

Cette proposition est classique pour $\alpha = 0$ (pour les fonctions continues). Supposons-la démontrée pour les classes $< \alpha$ et montrons qu'elle subsiste pour la classe α. Considérons, par exemple, la somme $f + \varphi$ de deux fonctions finies de Baire. Par hypothèse, f et φ sont limites, pour $n = \infty$, de f_n et de φ_n de classes $< \alpha$ et, de plus, finies (on vient de le prouver). Donc $f + \varphi$ est limite de $f_n + \varphi_n$ de classe $< \alpha$.

35. Identité des fonctions de Baire et des fonctions mesurables (B). — Cette identité, qui a été reconnue par M. Lebesgue [1], est la conséquence des trois théorèmes suivants :

1° *Toutes les fonctions de Baire sont mesurables* (B).

En effet, les fonctions continues sont mesurables (B), car les ensembles $E(f \geqq A)$ sont alors fermés. Les autres fonctions de Baire, provenant de celles-ci par des passages à la limite, sont aussi mesurables (B).

2° *La caractéristique d'un ensemble mesurable* (B) *est une fonction de Baire.*

En effet, les ensembles mesurables (B) se construisent, par addition, soustraction, multiplication et passage à la limite, à partir des domaines rectangulaires fermés (n° 29). Les caractéristiques de ces ensembles s'obtiennent, par des opérations de même nature, à partir des caractéristiques de ces domaines fermés. Il suffit donc de montrer que la caractéristique φ d'un domaine fermé Δ est une fonction de Baire. Ceci est immédiat. Soit r la distance du point P à Δ ; c'est une fonction continue de P, nulle dans Δ et là seulement. Or

$$\varphi = \lim_{m=\infty} \frac{1}{1 + mr};$$

donc φ est de classe 1 comme limite de fonctions continues.

---

[1] *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 1905).

3° *Les fonctions mesurables* (B) *sont des fonctions de Baire.*

Il suffit de prouver le théorème pour une fonction bornée, car une fonction non bornée est limite pour $n = \infty$ de la même fonction bornée aux deux nombres $-n$ et $+n$, et une fonction mesurable (B) reste telle quand on la borne (n° 34). Soit donc f mesurable (B) et bornée. Partageons l'intervalle de ses deux bornes par une échelle de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dont les degrés $a_{i+1} - a_i$ soient $< \varepsilon$. Soit φ_i la fonction caractéristique (mesurable B) de l'ensemble $E(a_i \leqq f < a_{i+1})$. Si ε tend vers zéro, f est limite de la fonction de Baire

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n;$$

donc f est une fonction de Baire.

Il est ainsi établi que la famille des fonctions mesurables (B) est la même que celle des fonctions de Baire et, par conséquent, se partage dans les mêmes classes.

36. **Classification des ensembles mesurables** (B). — On peut proposer plusieurs classifications des ensembles mesurables (B). La plus simple consiste à les ranger dans la classe de leur fonction caractéristique, qui est une fonction mesurable (B).

Cette définition a l'avantage d'étendre aux ensembles les propriétés de classe que possèdent leurs caractéristiques. Ainsi, on peut énoncer les deux propositions suivantes :

Tout ensemble, limite d'ensembles de classe $< \alpha$, est de classe α au plus. La réciproque n'est pas exacte.

Les sommes, différences et produits finis d'ensembles de classes $\leqq \alpha$, sont de classes $\leqq \alpha$.

Un ensemble nul (dépourvu de points) et le domaine entier que l'on considère ont respectivement les caractéristiques 0 et 1. Ils sont de classe 0 et ce sont les seuls ensembles de classe 0.

La détermination des ensembles de classe 1 se rattache à celle des fonctions de classe 1 et au théorème de Baire, dont nous ferons l'étude dans la troisième partie de ces leçons. Mais cette détermination peut se faire facilement dès maintenant.

Soient E un ensemble et φ sa fonction caractéristique, tous deux de classe 1. La fonction φ est limite d'une suite de fonctions con-

tinues $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ convergeant vers 0 ou 1. Définissons φ_n comme égal à 0 ou 1 selon que θ_n est $< \frac{1}{2}$ ou $\geq \frac{1}{2}$; la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ a la même limite que celle des θ. Donc E est limite d'ensembles *fermés* $E_1, E_2, \ldots$, car φ_n est la caractéristique de l'ensemble *fermé* $E_n = E\left(\theta_n \geq \frac{1}{2}\right)$. Mais CE, qui est aussi de classe 1, est aussi limite d'ensembles fermés E'_n, auquel cas son complémentaire E est limite des complémentaires ouverts CE'_n. De là, la proposition suivante :

Un ensemble de classe 1 est à la fois limite d'ensembles ouverts et limite d'ensembles fermés.

La réciproque est vraie [1].

En effet, si E est limite d'ensembles ouverts et aussi d'ensembles fermés, E et CE sont limites d'ensembles fermés et, par conséquent, tous deux sommes d'ensembles fermés (n° 12). Considérons les ensembles fermés F_n et F'_n (respectivement contenus dans E et CE) obtenus en limitant les deux sommes précédentes à leurs n premiers termes; ces ensembles, sans point commun, sont à distance finie l'un de l'autre. Soient P un point quelconque, r_n et r'_n ses distances respectives à F_n et à F'_n. Ces deux distances, fonctions continues de P, ne s'annulent pas ensemble; donc l'expression

$$\frac{r_n}{r_n + r'_n}$$

est fonction continue de P. La caractéristique φ de E est la limite de cette expression pour $n = \infty$: φ est de classe 1.

---

(1) Si l'on applique la proposition 2° du n° 110, *la condition nécessaire et suffisante pour que* E *soit de classe* 1 *est que, quel que soit* Q *parfait, l'un au moins des deux ensembles* E *ou* CE *soit compact sur* Q (n° 107).

CHAPITRE III.

INTÉGRALE DE LEBESGUE.

1. — Intégrale d'une fonction bornée.

37. **Définition de l'intégrale.** — Soit $f(P)$ une fonction du point P (de coordonnées $x, y, \ldots$), bornée et mesurable dans un ensemble E, borné et mesurable. Désignons par A et B les bornes de f et partageons l'intervalle (A, B) de ces deux bornes par une échelle de nombres croissants :

$$l_1 = A,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_i,\ \ldots,\ l_n,\ l_{n+1} = B.$$

Désignons par e_i la mesure de l'ensemble des points de E où l'on a $l_i \leqq f < l_{i+1}$ et aussi, au besoin, cet ensemble lui-même. Formons les deux sommes :

$$s = \sum_1^n l_i e_i, \qquad S = \sum_1^n l_{i+1} e_i.$$

Nous avons $s \leqq S$.

L'intégrale de $f(P)$ *dans* E *est la limite commune de ces deux sommes quand les nombres consécutifs* l_i *se rapprochent indéfiniment les uns des autres.*

Pour justifier cette définition, il faut prouver l'existence de cette limite. A cette fin, il suffit de montrer que si l'on considère deux nouvelles sommes s' et S' relatives à une nouvelle échelle $l'_1, l'_2, \ldots,$ différente de la première, les quatre sommes s, S, s' et S' sont aussi voisines qu'on veut, pourvu que les degrés des deux échelles soient suffisamment petits. Supposons donc ces degrés $< \varepsilon$. Considérons alors les deux sommes s'' et S'' relatives à une troisième échelle, formée par la combinaison des échelons des deux premières. Comme celle-ci provient de l'addition de nouveaux échelons

à chacune des deux autres, on s'assure aisément que s'' est égal ou supérieur à s et à s', S'' égal ou inférieur à S et à S'. Donc s'', en particulier, est intermédiaire entre s et S, et aussi entre s' et S'. Observons maintenant que l'on a

$$S - s = \sum_{1}^{n} (l_k - l_{k-1})\, e_k \leq \varepsilon \sum_{1}^{n} e_k = \varepsilon\, m\mathrm{E} ;$$

et, de même,

$$S' - s' \leq \varepsilon\, m\mathrm{E}.$$

Donc les sommes s et S d'une part, s' et S' de l'autre, sont aussi voisines qu'on veut, pourvu que ε soit suffisamment petit. Elles sont donc aussi voisines qu'on veut toutes les quatre, puisque les deux couples de sommes comprennent le même nombre s''.

L'intégrale est *simple* ou *multiple*, selon que $f(\mathrm{P})$ dépend d'une ou de plusieurs variables $x, y, \ldots$. Nous désignerons, avec M. Lebesgue [1], l'intégrale par la notation

$$\int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}.$$

Quand l'intégrale est simple et que P ne dépend que d'une seule coordonnée x, on écrit plutôt

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)\, dx,$$

et, si l'ensemble E se réduit à un intervalle (a, b),

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Parfois on veut mettre en évidence l'ordre de multiplicité de l'intégrale et les coordonnées $x, y, \ldots$ du point P. C'est ainsi que, dans le cas de deux coordonnées, l'*intégrale double* se désigne par

$$\int\!\!\int_{\mathrm{E}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

38. Propriétés de l'intégrale. — 1° L'intégrale vérifie le *théorème*

(1) *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (*Ann. Éc. Norm.*, 1910).

de la moyenne, c'est-à-dire que, f ayant pour bornes A et B, on a

$$\mathrm{A}.m\mathrm{E} \leq \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \leq \mathrm{B}.m\mathrm{E}.$$

En effet, les sommes s et S, qui ont pour limite commune l'intégrale, satisfont à ces conditions.

Il y a lieu de remarquer, en passant, le cas où $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, qui nous donne, f se réduisant alors à une constante a,

$$\int_{\mathrm{E}} a\, d\mathrm{P} = a.m\mathrm{E}, \qquad \int_{\mathrm{E}} d\mathrm{P} = m\mathrm{E}.$$

2° *L'intégrale est additive pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles contenus dans un domaine borné.*

Supposons d'abord que E soit la somme de deux ensembles E′ et E″ sans point commun. Je dis qu'on aura

$$\int_{\mathrm{E}} f\, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}'} + \int_{\mathrm{E}''} f\, d\mathrm{P}.$$

En effet, définissons respectivement e'_i et e''_i par rapport à E′ et à E″ comme e_i l'est par rapport à E, auquel cas e_i est la somme $(e'_i + e''_i)$. Les intégrales sur E′ et sur E″ sont les limites respectives des sommes

$$s' = \Sigma\, l_i e'_i, \qquad s'' = \Sigma\, l_i e''_i.$$

Or on a la relation $s = s' + s''$. La relation entre les intégrales se tire donc de celle-ci par un passage à la limite. La propriété additive est ainsi démontrée pour deux ensembles. Elle subsiste, de proche en proche, pour tout nombre limité d'ensembles.

Considérons maintenant le cas où E est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non empiétants. Soient E_n la somme des n premiers ensembles, et ε_n celle de tous les autres. La mesure de ε_n est la différence de celles de E et de E_n et tend vers zéro pour n infini. Or on a, par la démonstration précédente,

$$\int_{\mathrm{E}} f\, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}_n} f\, d\mathrm{P} + \int_{\varepsilon_n} f\, d\mathrm{P}.$$

Quand n tend vers l'infini, la dernière intégrale tend vers zéro avec me_{n+1}, par le théorème de la moyenne. D'autre part, l'intégrale sur E_n est la somme des intégrales sur les n premiers ensembles, et cette somme s'étend progressivement à tous quand n tend vers l'infini.

3° *Si deux fonctions vérifient (sur E) la relation $\varphi \leq f$, on a aussi*

$$\int_E \varphi \, dP \leq \int_E f \, dP.$$

Définissons e_i au moyen de f comme précédemment, de sorte que E est la somme des ensembles e_i ; il vient, par la propriété additive et le théorème de la moyenne,

$$\int_E \varphi \, dP = \sum_1^n \int_{e_i} \varphi \, dP \leq \sum_1^n \int_{e_i} l_i \, dP = \sum_1^n l_i e_i = s.$$

On peut faire tendre s vers l'intégrale de f, qui est sa limite, et l'on obtient la relation proposée.

4° *L'intégrale d'une somme de fonctions bornées et mesurables, en nombre limité, est la somme des intégrales de chaque terme.*

Considérons d'abord un cas très particulier. Soit a une constante ; je dis qu'on a

$$\int_E (f + a) \, dP = \int_E f \, dP + \int_E a \, dP = \int_E f \, dP + a \, . \, mE.$$

Pour le montrer, calculons, comme précédemment, avec l'échelle $l_1, l_2, \ldots$ la somme s relative à l'intégrale de f. Calculons la somme analogue s' pour $f + a$ avec l'échelle $l_1 + a$, $l_2 + a, \ldots$; il est clair que nous obtenons

$$s' = \sum_1^n (l_i + a) e_i = s + a \, mE,$$

et, à la limite, la relation proposée.

Considérons maintenant la somme $f + \varphi$ de deux fonctions quelconques. Ce cas se ramène au précédent.

Nous avons, en effet,

$$\int_E (f+\varphi)\,dP = \sum_1^n \int_{e_i} (f+\varphi)\,dP \geqq \sum_1^n \int_{e_i} (l_i+\varphi)\,dP.$$

Donc, par le cas particulier qui précède,

$$\int_E (f+\varphi)\,dP \geqq s + \int_E \varphi\,dP.$$

Si l'on remplace l_i par l_{i+1} dans ce raisonnement, s est remplacé par S et l'inégalité change de sens. Donc, à la limite, s et S tendant vers la même intégrale, il vient

$$\int_E (f+\varphi)\,dP = \int_E f\,dP + \int_E \varphi\,dP.$$

Le théorème est établi pour la somme de deux fonctions : il subsiste donc, de proche en proche, pour la somme d'un nombre limité de fonctions.

5° *Un facteur constant*, a, *peut sortir du signe d'intégration*, *c'est-à-dire que l'on a*

$$\int_E af\,dP = a\int_E f\,dP.$$

C'est immédiat si $a=0$, les deux membres étant nuls. Supposons $a>0$; calculons la somme s, relative à l'intégrale de f, avec l'échelle l_1, l_2, ... et celle s', relative à l'intégrale de af, avec l'échelle al_1, al_2, ... ; nous avons $s'=as$ et, à la limite, nous obtenons la relation proposée. Le cas où a est <0 se ramène au précédent, car l'intégrale de af est égale en signe contraire à celle de $-af$, la somme des deux intégrales étant nulle (4°).

6° *On a la relation*

$$\left|\int_E f\,dP\right| \leqq \int_E |f|\,dP.$$

En effet, soit E′ la portion de E sur laquelle f est non négatif, E″ celle où f est négatif. Les intégrales de f sur E′ et sur E″ sont nulles ou de signes contraires. Or l'intégrale de f sur E est leur somme et celle de $|f|$ leur différence : les valeurs absolues se

retranchent dans le premier cas, et s'ajoutent dans le second, ce qui prouve la formule.

7° *Deux fonctions qui ne diffèrent sur E que dans un ensemble de mesure nulle, ont la même intégrale sur E.*

C'est la conséquence de la propriété additive et du théorème de la moyenne. Les intégrales sont nulles sur l'ensemble de mesure nulle où les fonctions diffèrent et, par conséquent, se réduisent aux intégrales sur l'ensemble restant où les fonctions coïncident.

Nous dirons, avec M. Lebesgue, qu'une condition a lieu *presque partout*, si elle a lieu sauf dans un ensemble de mesure nulle. Donc *deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale.*

D'une manière générale, dans le calcul d'une intégrale, on peut négliger un ensemble de points de mesure nulle. On utilise souvent cette remarque.

39. Théorème de Lebesgue pour le passage à la limite sous le signe $\int$. — *Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ une suite illimitée de fonctions du point P dans un ensemble E. Si ces fonctions sont bornées dans leur ensemble (c'est-à-dire quels que soient P et n) et tendent, en tout point de E, vers une limite unique F(P), on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dP = \int_E F \, dP.$$

Ce théorème est un des plus beaux résultats de la théorie. Nous allons le démontrer. Observons d'abord que F étant bornée et mesurable, il suffit de prouver que l'intégrale de $(f_n - F)$ tend vers zéro. Il suffit pour cela, par la propriété 6° précédente, que l'intégrale de $|f_n - F|$ tende vers zéro. On peut donc, dans la démonstration de la formule précédente, admettre que f_n est une fonction bornée, non négative, tendant vers zéro, et il faut montrer que la limite de son intégrale est nulle.

Donnons-nous un nombre positif ε; désignons par E_1 l'ensemble des points de E où toutes les fonctions f_n sont $< \varepsilon$ et, en général, par E_k l'ensemble des points de E où f_{k-1} est $\geq \varepsilon$, tandis que toutes les fonctions suivantes sont $< \varepsilon$. Les ensembles E_k sont

sans point commun deux à deux, et l'on a, puisque f_n converge vers zéro,

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots.$$

Par conséquent,

$$\int_E f_n \, dP = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \ldots + \int_{E_k} f_n \, dP + \ldots.$$

Cette série d'intégrales est uniformément convergente quand n varie. En effet, soit B la borne générale des fonctions f_n ; les termes de cette série ne surpassent pas ceux de même rang de la série positive, convergente et indépendante de n,

$$B(mE_1) + B(mE_2) + \ldots + B(mE_k) + \ldots = B(mE).$$

Nous allons en déduire que la plus grande limite de la série des intégrales est inférieure à tout nombre donné, $\varepsilon(mE)$, quand n tend vers l'infini. En effet, dès que n est $\geqq k$, f_n devient $< \varepsilon$ dans E_k ; son intégrale dans E_k (qui est le terme général de la série) devient $< \varepsilon(mE_k)$, à cause du théorème de la moyenne. Donc, à cause de l'uniformité de la convergence, la plus grande limite de la somme de la série est $< \varepsilon \Sigma mE_k$ ou $\varepsilon(mE)$. Cette plus grande limite est donc nulle, et la série converge vers zéro.

2. — Intégrale d'une fonction sommable.

40. **Fonction sommable.** — M. Lebesgue a étendu la définition de l'intégrale à une classe de fonctions non bornées qu'il appelle *fonctions sommables*.

Considérons d'abord une fonction mesurable, f, *non négative*. Définissons, pour n entier, une fonction auxiliaire f_n : égale à f aux points P où f est $\leqq n$, mais égale à n si f est $> n$. La fonction f_n est bornée et mesurable, et son intégrale sur un ensemble E (borné et mesurable) est déterminée par ce qui précède. Nous posons alors, par définition,

$$\int_E f \, dP = \lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dP.$$

Cette limite est finie, ou infinie positive, et l'intégrale a

toujours un sens. Si cette limite est finie, la fonction f est *sommable* sur E.

Si la fonction f est non positive, son intégrale est, par définition, celle de sa valeur absolue changée de signe et f est *sommable* ou non comme sa valeur absolue.

Dans le cas général, f est la différence, $f_1 - f_2$, des deux fonctions non négatives, définies par les égalités

$$2f_1 = |f| + f, \qquad 2f_2 = |f| - f.$$

La fonction f est *sommable* si f_1 et f_2 le sont, auquel cas on pose, par définition,

$$\int_E f\,dP = \int_E f_1\,dP - \int_E f_2\,dP.$$

Nous n'attribuerons ici aucun sens à l'intégrale d'une fonction non sommable qui change de signe [1].

Il résulte immédiatement de ces définitions que si f est sommable, $|f|$ l'est aussi et son intégrale est au moins égale à la valeur absolue de celle de f, ce qui généralise la propriété 6° du n° 38. Réciproquement, si $|f|$ est sommable, f l'est aussi.

On peut aussi définir les intégrales sur des ensembles non bornés, mais nous laisserons cette généralisation de côté.

41. Propriétés des intégrales. — 1° *L'intégrale d'une fonction sommable f est une fonction complètement additive d'ensemble, c'est-à-dire que si E est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ sans point commun deux à deux, l'intégrale sur E est la somme des intégrales sur $E_1, E_2, \ldots$.*

On peut supposer f positive. Soit f_n définie comme précédemment. L'intégrale de f_n est additive et f_n est $\leq f$; par conséquent,

$$\int_E f_n\,dP = \sum_i \int_{E_i} f_n\,dP \leq \sum_i \int_{E_i} f\,dP.$$

[1] L'intégration d'une fonction non sommable a été étudiée par M. Denjoy sous le nom de *totalisation* (*C. R. Acad. Sc.*, 25 mars et 22 avril 1912).

Faisons tendre n vers l'infini. S'il n'y a qu'un nombre limité d'ensembles E_k, on peut passer à la limite terme à terme dans le second membre, ce qui prouve le théorème.

S'il y a une infinité d'ensembles E_k, on peut seulement déduire, à la limite, des relations précédentes

$$\int_E f\,dP \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,dP.$$

Pour prouver que l'égalité seule est possible, cherchons une relation de sens contraire à celle-ci. On a, quel que soit p,

$$\int_E f_n\,dP \geq \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k} f_n\,dP.$$

Si l'on fait tendre n d'abord et p ensuite vers l'infini, on trouve la relation cherchée

$$\int_E f\,dP \geq \sum_{1}^{\infty} \int_{E_k} f\,dP.$$

2° *La somme d'un nombre limité de fonctions sommables est sommable, et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales de chaque terme.*

Il suffit de prouver le théorème pour la somme de deux fonctions. Considérons d'abord la somme f de deux fonctions sommables f' et f'' non négatives. Dans ce cas, définissant f_n comme au numéro précédent, on a

$$f_n \leq f'_n + f''_n \leq f_{2n};$$

par conséquent, ces fonctions étant bornées,

$$\int_E f_n\,dP \leq \int_E f'_n\,dP + \int_E f''_n\,dP \leq \int_E f_{2n}\,dP;$$

et, à la limite, pour $n = \infty$,

$$\int_E f\,dP \leq \int_E f'\,dP + \int_E f''\,dP = \int_E f\,dP,$$

ce qui prouve la proposition.

Considérons, en second lieu, le cas où f' et f'' sont de signe

variable. Leur somme f est sommable, car sa valeur absolue ne surpasse pas $|f'| + |f''|$. Je dis qu'on a encore

$$\int_E f\,dV = \int_E f'\,dV + \int_E f''\,dV.$$

En effet, E peut se décomposer en un certain nombre de portions (n'empiétant pas) sur lesquelles f, f' et f'' ne changent pas de signe. En vertu de 1°, la relation précédente aura lieu sur E si elle a lieu sur chaque portion. Or, si f, f' et f'' ne changent pas de signe et qu'on transpose d'un membre à l'autre les termes de la relation précédente, de manière qu'ils soient tous trois positifs, on est ramené au cas précédent.

3° *Si f est sommable dans un ensemble* E *et si l'ensemble e est contenu dans* E, *l'intégrale de f sur e tend vers zéro avec la mesure de e.*

On exprime cette propriété en disant que l'intégrale est *fonction absolument continue* de e [1].

Cette propriété résulte du théorème de la moyenne si f est bornée. Si f n'est pas bornée, il suffit de considérer le cas où f est non négative (n° 40). Faisons cette hypothèse; donnons-nous un ε positif et prenons, ce qui est possible, n assez grand pour vérifier la condition

$$\int_E f\,dV < \int_E f_n\,dV + \varepsilon.$$

Nous aurons *a fortiori* dans e (contenu dans E)

$$\int_e f\,dV < \int_e f_n\,dV + \varepsilon.$$

Il suffit donc que la mesure de e soit $< \varepsilon : n$ pour que l'intégrale de f_n dans e soit $< \varepsilon$ et celle de f est alors inférieure à 2ε, qui est aussi petit qu'on veut.

42. Passage à la limite sous le signe $\int$. — M. Lebesgue a

---

[1] Cette locution est due à M. Vitali (*Sull'integrazione per serie*, Rend. del Circ. mat. di Palermo, 1907. — *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Rend. del R. Acc. delle Sc. di Torino, 1907).

généralisé son théorème sur les fonctions bornées (n° 39) de la manière suivante [1] :

Si les fonctions de la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sont sommables dans un ensemble E, *et si leur valeur absolue est inférieure à une fonction positive sommable* Φ *indépendante de n, enfin si la suite admet une fonction limite* F, *celle-ci est sommable et l'on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dP = \int_E F \, dP.$$

On raisonne comme dans le cas où f_n est bornée. La démonstration se ramène d'abord au cas où f_n non négative tend vers zéro et la démonstration s'achève comme au n° 39. Seulement, cette fois-ci, l'uniformité de la convergence de la série d'intégrales,

$$\sum \int_{E_k} f_n \, dP,$$

provient de la convergence supposée de la série des intégrales *majorantes*

$$\sum \int_{E_k} \Phi \, dP.$$

Ce théorème renferme comme cas particulier un théorème antérieur de M. Beppo Levi [2] auquel nous donnerons ici une légère extension :

Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ une suite non décroissante de fonctions sommables, non négatives. Si la suite admet une fonction limite, finie ou infinie, F, *alors on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dP = \int_E F \, dP.$$

Si F est sommable, comme le suppose M. B. Levi, ce théorème rentre dans le précédent en posant $\Phi = F$. Si F n'est pas sommable, l'égalité exprime que la limite est infinie, ce qui reste maintenant à démontrer.

Soit N un nombre positif. Désignons par F_N la fonction F bornée

(1) *Annales de l'École Normale*, 1910.
(2) *Sopra l'integrazione delle serie* (*Rend. del R. Ist. Lomb.*, 1906).

à N (c'est-à-dire réduite à N quand elle dépasse ce nombre), par $(f_n)_N$ la fonction f_n bornée de la même façon. Il vient, par le théorème de Lebesgue pour les fonctions bornées, car F_N est limite de $(f_n)_N$,

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n \, dP \geq \lim_{n=\infty} \int_E (f_n)_N \, dP = \int_E F_N \, dP.$$

Le dernier membre est infini avec N, ce qui exige que le premier membre soit infini.

Le lecteur, désireux de pousser plus loin la théorie du passage à la limite sous le signe $\int$, trouvera une étude approfondie de cette question dans notre Mémoire récent *Sur l'intégrale de Lebesgue* (1). Nous le renverrons donc à ce Mémoire.

3. — Réduction des intégrales doubles.

43. **Intégrales de fonctions mesurables (B).** — Le problème de la réduction des intégrales doubles est une simple application du théorème de Lebesgue (n° 39) si la fonction intégrée est mesurable (B) et bornée. Cette réduction est formulée dans le théorème suivant :

Soit Δ un rectangle limité aux abscisses a, b et aux ordonnées c, d. Si f(x, y) est bornée et mesurable (B) dans ce rectangle, l'intégrale double de f dans Δ se réduit à deux intégrales simples superposées, toutes deux de fonctions mesurables (B), par la formule

$$(1) \qquad \iint_\Delta f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

Ce théorème est élémentaire, il est la conséquence du théorème de la moyenne et de l'uniformité de la continuité, et nous le supposerons démontré, si f est continue (ou de la classe zéro). Pour prouver qu'il est général, il suffit de l'étendre à la classe α en l'admettant pour les classes antérieures. Soit donc f de classe α et limite (pour n infini) de f_n de classe $< \alpha$. Nous pouvons écrire l'équation précédente en y remplaçant f par f_n (bornée aussi).

(1) *Transactions of the american mathematical Society*, 1915.

Quand f_n tend vers f, l'intégrale de f_n dans Δ et celle de f_n dans (c, d) ont pour limites les intégrales de f dans Δ et de f dans (c, d). Donc la relation suivante, qui résulte du même théorème de Lebesgue :

$$\int\int_\Delta f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \int_a^b dx \int_c^d f_n\,dy = \int_a^b dx \lim_{n=\infty} \int_c^d f_n\,dy,$$

revient à l'équation (1) proposée. Si l'on observe, en outre, que la limite indiquée sous le signe $\int$ dans l'équation précédente est mesurable (B), car c'est celle d'une fonction mesurable (B) par hypothèse, le théorème se trouve complètement démontré.

Lorsque la fonction f n'est pas bornée, le théorème précédent et la formule de réduction subsistent, si f est une fonction mesurable (B) *non négative.*

Il n'y a, en effet, qu'à reproduire la démonstration précédente en regardant cette fois f_n comme une fonction, bornée pour chaque n, et qui tend en croissant vers f quand n tend vers l'infini. Le raisonnement subsiste, sauf qu'il faut invoquer le théorème de Beppo Levi du numéro précédent au lieu de celui de Lebesgue. Mais cette fois les deux membres de la formule (1) peuvent être infinis positifs.

La formule de réduction subsiste encore si f non bornée est de signe variable, pourvu que $f(x, y)$ soit sommable dans le domaine Δ, mais moyennant une convention supplémentaire.

Comme f est la différence, $f_1 - f_2$, de deux fonctions sommables non négatives, on a, par le théorème précédent,

$$\int\int f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1\,dy - \int_a^b dx \int_c^d f_2\,dy,$$

et le second membre est la différence de deux quantités finies. Les intégrales de f_1 et de f_2 dans l'intervalle (c, d) sont donc des fonctions sommables de x dans l'intervalle (a, b), donc *finies* toutes deux, sauf dans un ensemble de mesure nulle. Si nous convenons de négliger cet ensemble de mesure nulle de valeurs de x, pour

lesquelles l'intégrale

$$\int_c^d (f_1 - f_2)\,dy = \int_c^d f\,dy$$

peut cesser d'exister, nous pouvons de nouveau écrire la formule (1).

41. Fonctions mesurables au sens de Lebesgue. — La formule de réduction des intégrales doubles s'étend à toutes les fonctions mesurables et sommables, moyennant une convention semblable à la précédente.

Considérons d'abord une fonction f, bornée dans le domaine Δ. Elle est intermédiaire entre deux fonctions mesurables (B), f_1, f_2, égales à f presque partout dans Δ (n° 32), et auxquelles on peut imposer les mêmes bornes qu'à f (n° 34). Les intégrales dans Δ de f_1, f_2 et f sont les mêmes. Il vient donc, par le théorème du numéro précédent,

$$\int\int_\Delta f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f_2\,dy.$$

On tire de là

$$\int_a^b dx \int_c^d (f_1 - f_2)\,dy = 0,$$

ce qui exige que la fonction de x, non négative,

$$\int_c^d (f_1 - f_2)\,dy = \int_c^d f_1\,dy - \int_c^d f_2\,dy,$$

soit nulle presque partout dans (a, b). Donc on a, *presque partout* dans (a, b),

$$\int_c^d f_1\,dy = \int_c^d f_2\,dy.$$

Mais, pour les valeurs de x qui satisfont à cette relation (donc *presque toutes*), on a aussi

$$\int_c^d f_1\,dy = \int_c^d f_2\,dy = \int_c^d f\,dy,$$

car, f étant intermédiaire entre f_1 et $f_2 \leq f_1$ qui ont la même intégrale dans (c, d), on a *presque partout* dans (c, d) $f_1 = f_2 = f$.

Donc, si l'on néglige l'ensemble de valeurs de x de mesure nulle où ces relations peuvent être en défaut, on peut remplacer f_1 par f dans l'équation du début, et l'on retrouve la formule de réduction (1). C'est un résultat énoncé par M. Fubini ([1]) :

La formule (1) *du numéro précédent subsiste pour une fonction mesurable et bornée f, qui n'est pas mesurable* (B), *mais à condition de négliger, dans l'intégration par rapport à x, un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, pour lesquelles l'intégrale*

$$\int_c^d f\,dy$$

cesse d'avoir un sens.

L'extension aux fonctions non bornées se fait comme dans le cas précédent.

La réduction d'une intégrale double dans un ensemble superficiel E, mesurable et contenu dans un rectangle Δ, se fait par les formules précédentes : on pose la fonction nulle dans CE, ce qui ramène au cas précédent.

Il est clair que l'on peut dans la formule (1) intervertir les intégrations par rapport à x et à y. Il est inutile d'insister sur ce point.

4. — COMPARAISON AVEC L'INTÉGRALE DE RIEMANN.

45. Problème résolu par l'intégrale de Riemann. — Nous pouvons nous borner aux intégrales simples de fonctions bornées. On définit, dans les Cours élémentaires, l'intégrale d'une fonction continue $f(x)$ dans un intervalle (a, b). Cette intégrale dépend de l'intervalle (a, b) et varie avec lui. C'est une *fonction d'intervalle*, qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° Elle possède le *théorème de la moyenne relativement à $f(x)$*;

2° Elle est *additive*, c'est-à-dire que si l'on partage l'inter-

---

([1]) *Sugli integrali multipli* (*Rend. del R. Acc. d. Lincei*, 1er semestre 1907). *Voir* aussi la Thèse de M. Lebesgue.

valle (a, b) en plusieurs autres, l'intégrale sur (a, b) est la somme des intégrales sur chaque partie.

Posons-nous le problème suivant :

Déterminer à quelle condition doit satisfaire $f(x)$ pour qu'une fonction d'intervalle soit complètement déterminée par les deux propriétés précédentes : satisfaire au théorème de la moyenne relativement à $f(x)$ et être additive.

Nous allons montrer que cette condition est l'*intégrabilité au sens de Riemann*, de sorte que la fonction d'intervalle ainsi définie est l'*intégrale de Riemann*.

Soit $f(x)$ une fonction que nous supposerons seulement univoque et bornée, mais non nécessairement mesurable. Désignons par M_x et m_x ses bornes supérieure et inférieure au point x (limites, par définition, des mêmes bornes dans un intervalle infiniment petit contenant x à son intérieur).

Décomposons l'intervalle (a, b) en parties consécutives par les points :

$$x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n, x_{n+1} = b.$$

Désignons par δ_i l'amplitude de l'intervalle (x_i, x_{i+1}), par M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de f dans le même intervalle, par $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ des fonctions respectivement égales à M_i et à m_i pour $x_i < x < x_{i+1}$. Ces deux fonctions (constantes dans des intervalles) sont mesurables (B).

Une fonction d'intervalle supposée additive et assujettie au théorème de la moyenne, sera nécessairement comprise entre les deux sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i = \int_a^b \varphi \, dx, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i = \int_a^b \Phi \, dx.$$

Considérons maintenant une infinité dénombrable de modes successifs de subdivision de l'intervalle (a, b) en intervalles de plus en plus petits et dont les amplitudes tendent vers zéro. Soit E l'ensemble de tous les points de subdivisions de ces divers modes réunis ; cet ensemble est dénombrable, donc de mesure nulle, et nous pouvons le négliger dans l'intégration. En tout autre point,

les valeurs de φ et Φ, qui varient avec les modes successifs de subdivision, ont respectivement pour limites les bornes m_x et M_x, qui sont donc des fonctions mesurables (B); et il vient par le théorème de Lebesgue (nº 39)

$$\lim \Sigma m_i \delta_i = \int_a^b m_x \, dx, \qquad \lim \Sigma M_i \delta_i = \int_a^b M_x \, dx.$$

Ces deux limites de sommes, dont l'existence a été démontrée par par M. Darboux ([1]), ont reçu de M. C. Jordan les noms d'*intégrales inférieure* et *supérieure* de $f(x)$ ([2]). Nous voyons qu'elles s'expriment en intégrales de Lebesgue.

Chacune d'elles est donc une fonction additive d'intervalle qui satisfait au théorème de la moyenne sur les intervalles. D'autre part, toute fonction qui satisfait à ces conditions est intermédiaire entre les précédentes. La condition pour qu'il n'y en ait qu'une seule est donc que ces deux-ci soient égales. C'est précisément la *condition d'intégrabilité de Riemann*, et la question posée est résolue.

Il résulte de là que si $f(x)$ est mesurable et non intégrable au sens de Riemann, l'intégrale de Lebesgue ne peut pas être définie par ses propriétés comme fonction d'intervalle, mais seulement par ses propriétés comme fonction d'ensemble mesurable. Elle l'est d'ailleurs par les conditions d'être additive sur les ensembles et de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles, car, en vertu de ces deux conditions, elle est intermédiaire entre les sommes s et S qui servent à la définir (nº 37).

Les considérations précédentes font saisir dans quel sens l'intégrale de Lebesgue généralise celle de Riemann; mais, pour préciser la portée de cette généralisation, il reste à prouver qu'une fonction est mesurable (donc intégrable au sens de Lebesgue) si elle est intégrable au sens de Riemann. C'est l'objet du théorème suivant :

46. **Théorème.** — *Si $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann,*

([1]) *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Ann. Éc. Norm.*, 1875).

([2]) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, 2e édition.

$f(x)$ est mesurable et son intégrale de Lebesgue coïncide avec celle de Riemann.

On a, en effet, par hypothèse,

$$\int_a^b (M_1 - m_1)\,dx = 0 \qquad (M_1 \geq m_1).$$

Par conséquent, M_1 et m_1, qui sont mesurables, sont égaux *presque partout*, et, par suite, égaux à la fonction intermédiaire $f(x)$. Donc celle-ci est mesurable. Son intégrale de Lebesgue existe donc ; elle satisfait aux deux conditions qui définissent celle de Riemann ; elle est, par conséquent, la même.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE.

CHAPITRE IV.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES DÉRIVÉES ET LES RÉSEAUX.

1. — Généralités sur les fonctions additives.

47. **Définitions**. — Soit e un ensemble borné et mesurable, variable dans un espace quelconque. Soit ensuite $F(e)$ une fonction finie de l'ensemble e. On suppose que cette fonction est nulle sur un ensemble nul (ou dépourvu de points). Si F n'était définie que sur les ensembles contenus dans un domaine rectangulaire Δ, on étendrait sa définition à tout l'espace en posant $F(e) = F(e\Delta)$.

La fonction $F(e)$ est *additive* (au sens complet) si sa valeur sur un ensemble, somme (finie ou infinie) d'ensembles sans point commun deux à deux et contenus dans un domaine borné, est la somme de ses valeurs sur chaque partie.

La fonction $F(e)$ est *continue* dans un domaine borné Δ, si elle tend vers zéro avec le diamètre de $e < \Delta$; elle est *absolument continue* si elle tend vers zéro avec la mesure de $e < \Delta$. Si une fonction est continue et additive, elle est évidemment bornée sur tout ensemble contenu dans le domaine borné Δ.

48. **Variations positive, négative, totale**. — *Une fonction additive* $F(e)$, *supposée bornée sur les ensembles contenus dans un domaine borné* Δ (¹), *est la différence de deux fonctions de même nature non négatives.*

(¹) On prouvera plus tard (nº 78) que cette hypothèse est déjà une conséquence de la propriété additive.

Considérons un ensemble E contenu dans le domaine Δ. Soit $\varphi(E)$ la borne supérieure de $F(e)$ pour tous les ensembles e (y compris l'ensemble nul) contenus dans E. La fonction $\varphi(E)$ de l'ensemble E est *non négative* (puisque F s'annule sur e nul) et je dis qu'elle est *additive*.

Supposons que E soit une somme, finie ou infinie,

$$E = E' + E'' + \ldots$$

d'ensembles non empiétants et contenus dans un domaine Δ. Soit e contenu dans E et somme de e', e'', ... contenus respectivement dans E', E'', ... On a

$$F(e) = F(e') + F(e'') + \ldots$$

On dispose arbitrairement soit de la variation de e, soit de celles de e', e'', ... Donc on peut, à volonté, faire tendre le premier ou le second membre de cette équation vers sa borne supérieure. Ces deux bornes, ne pouvant se surpasser l'une l'autre, sont égales ; par conséquent,

$$\varphi(E) = \varphi(E') + \varphi(E'') + \ldots$$

La fonction φ est donc additive. Donc F se décompose dans la différence de deux fonctions additives et non négatives, par la formule

$$F = \varphi - (\varphi - F).$$

La première φ s'appelle la *variation positive* de F, la seconde est la valeur absolue de sa *variation négative* $F - \varphi$, leur somme

$$\Phi = \varphi + (\varphi - F)$$

est la *variation totale* Φ. C'est aussi une fonction additive et non négative et l'on a

$$\Phi \geq |F|.$$

Si F est continue, ses variations positive, négative et totale le sont aussi. — Si F est absolument continue, les mêmes variations le sont aussi.

En effet, si $F(e)$ tend vers zéro avec le diamètre ou avec la mesure de e, on peut en dire autant de la borne supérieure $\varphi(e)$.

Ainsi, une fonction additive, soit continue, soit absolument

continue est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives.

2. — Dérivées des fonctions d'ensemble.

49. Dérivées symétriques (¹). — Les dérivées d'une fonction d'ensemble sont des fonctions de point. Leur définition générale a un caractère complexe et laisse une part à l'arbitraire. C'est pourquoi il est utile de commencer par préciser une définition particulière, aussi simple que possible, celle des *dérivées symétriques* au point P.

Soit ω un domaine rectangulaire à côtés égaux (nº 7) et de centre P (intervalle, carré, cube, etc.); *les dérivées symétriques supérieure* ou *inférieure* de F(*e*) au point P sont les plus grande ou plus petite limites du quotient

$$\frac{F(\omega)}{m\omega},$$

quand le domaine ω, c'est-à-dire sa mesure, tend vers zéro.

50. Dérivées quelconques. — M. Lebesgue a montré (²) que les propriétés essentielles des dérivées subsistent avec une définition plus générale que la précédente. On peut, en effet, dans la définition des dérivées, substituer aux domaines ω qui tendent vers zéro, des ensembles mesurables quelconques *e* de mesure infiniment petite, mais il faut que ces ensembles satisfassent à une certaine condition : ils doivent faire partie d'une *famille régulière*. Expliquons ce que cela veut dire.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles *e* est dite *régulière* au point P si elle contient des ensembles de mesure infiniment petite, et si le quotient

$$\frac{m\omega}{me},$$

où ω est le plus petit domaine rectangle, de centre P et à côtés égaux, qui contienne *e*, ne surpasse pas un nombre positif fixe *k*

(¹) Cette expression est employée ici pour la première fois.

(²) *Intégration des fonctions discontinues* (*Ann. Éc. Norm.*, 1910).

pour tous les ensembles de la famille. Nous dirons que h est le *paramètre de régularité* de la famille $\mathcal{F}$.

La définition générale des dérivées au point P s'obtient en considérant une famille régulière quelconque en ce point. On définit alors les dérivées sur cette famille régulière $\mathcal{F}$ de la manière suivante :

Les dérivées supérieure et inférieure au point P (*sur la famille* $\mathcal{F}$) sont les plus grande et plus petite limites du quotient

$$\frac{F(e)}{me}$$

quand on considère un ensemble e, de mesure infiniment petite, mais appartenant à la famille $\mathcal{F}$.

Si ces deux dérivées sont égales, on dit qu'il y a *une dérivée unique* ou, tout simplement, *une dérivée* au point P (sur la famille $\mathcal{F}$). Les dérivées supérieure, inférieure et unique peuvent se désigner par $\overline{\mathrm{D}}\mathrm{F}$, $\underline{\mathrm{D}}\mathrm{F}$ et DF respectivement. Toutes trois se désignent aussi par $\overline{\underline{\mathrm{D}}}\mathrm{F}$.

Voici des exemples importants de familles régulières :

Considérons une fonction $F(e)$ d'ensemble linéaire et ses dérivées en un point x. Les domaines ω se réduisent ici à des intervalles de centre x. Les intervalles α, situés à droite de x et ayant x pour origine, forment une famille régulière au point x, dont le paramètre de régularité $h = 2$. Les dérivées sur cette famille sont les *dérivées à droite* au point x. Les intervalles situés à gauche de x (avec x pour extrémité) forment une autre famille régulière, qui définit les *dérivées à gauche* au point x.

D'une manière générale, la valeur des dérivées dépend de la famille régulière servant à les calculer. Nous montrerons toutefois que ce choix n'a d'influence que dans un ensemble de points de mesure nulle. Aux autres points, il y aura une dérivée unique et déterminée, indépendante de la définition. Nous rattacherons la démonstration de ce fait au principe suivant :

51. Principe de la dérivée symétrique nulle. — *Si la dérivée symétrique d'une fonction* F, *additive et non négative, est nulle au point* P, *alors la dérivée de* F *est nulle en ce point quelle que soit la manière de la définir.*

Soit $\mathcal{F}$ une famille régulière quelconque d'ensembles e servant à définir la dérivée au point P et soit k son paramètre de régularité. Soit e un ensemble de la famille et soit ω le plus petit domaine rectangulaire de centre P ayant ses côtés égaux et contenant e. Comme F est additive et non négative, on a

$$\frac{F(e)}{me} \leq \frac{F(\omega)}{me} = \frac{m\omega}{me}\,\frac{F(\omega)}{m\omega} \leq k\,\frac{F(\omega)}{m\omega}.$$

Donc le premier quotient (qui est non négatif) tend vers zéro avec le dernier : la dérivée sur $\mathcal{F}$ s'annule en même temps que la dérivée symétrique.

3. — Dérivées sur un réseau [1].

52. Construction d'un réseau linéaire. — Considérons un axe Ox illimité dans les deux sens. Un *réseau linéaire* sur cet axe est défini par la superposition d'une suite illimitée de *grillages* $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \ldots$ dont voici les définitions.

On forme le grillage $\mathcal{G}_1$, en décomposant l'axe Ox en parties égales par des points intermédiaires. Ces points sont les *nœuds du grillage* $\mathcal{G}_1$ et les parties consécutives sont les *mailles du grillage* $\mathcal{G}_1$. Nous désignerons toutes ces mailles indifféremment par α_1.

On forme le grillage $\mathcal{G}_2$ en ajoutant de nouveaux nœuds aux précédents, ou en décomposant les mailles α_1 en mailles plus petites α_2, qui sont les *mailles du grillage* $\mathcal{G}_2$. Les nœuds anciens et nouveaux sont les *nœuds du grillage* $\mathcal{G}_2$.

On continue ainsi de suite. Les nœuds du grillage $\mathcal{G}_n$ se composent des nœuds des grillages précédents et de nœuds supplémentaires. Les mailles α_n du grillage $\mathcal{G}_n$ proviennent de la décomposition des mailles α_{n-1} du grillage $\mathcal{G}_{n-1}$.

Tous ces grillages superposés constituent le *réseau*.

Il reste quelques détails à préciser.

En principe, les mailles α_n pourraient s'obtenir par le partage des mailles α_{n-1} en un nombre quelconque de parties. Certaines conséquences que nous voulons obtenir dans la suite, exigent que

---

(1) De la Vallée Poussin, *Sur l'intégrale de Lebesgue* (*Transactions of the american mathematical Society*, 1915).

ce nombre soit impair. Pour fixer les idées et éviter des longueurs, nous conviendrons, une fois pour toutes, que, pour passer d'un grillage au suivant, *le partage des mailles se fera en trois parties égales*.

En second lieu, nous voulons que deux mailles contiguës d'un même grillage soient sans point commun. A cet effet, nous conviendrons qu'une maille α_n ne contient qu'une seule de ses extrémités, et, pour préciser, ce sera celle de coordonnée minimum (celle de gauche).

Avec cette convention, un point x appartient à une maille de chaque grillage et à une seule. Ces mailles, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont emboîtées les unes dans les autres et constituent une famille régulière, définie d'une manière unique au point x, et pouvant servir au calcul des dérivées en ce point.

53. Réseau superficiel. — Soient deux axes Ox et Oy dans le plan. Un réseau superficiel R se définit par deux réseaux linéaires, l'un R_x sur O_x, l'autre R_y sur O_y.

Soient $(G_1)_x, (G_2)_x, \ldots, (G_n)_x, \ldots$ les grillages successifs de R_x; de même, $(G_1)_y, (G_2)_y, \ldots$ les grillages successifs de R_y. Désignons, en général, par α_n une maille de $(G_n)_x$ et par β_n une maille de $(G_n)_y$. Nous supposons les mailles initiales α_1 et β_1 de même amplitude, alors les mailles α_n et β_n le sont aussi par les conventions faites sur les réseaux linéaires.

Maintenant le grillage superficiel G_n résulte de la combinaison des deux grillages linéaires $(G_n)_x$ et $(G_n)_y$. Une maille ω_n du grillage G_n est définie par deux mailles particulières α_n et β_n, c'est-à-dire que le point P de coordonnées x, y appartient à ω_n si x appartient à α_n et y à β_n. Les mailles ω_n sont donc des carrés provenant de la décomposition des mailles ω_{n-1} en 3^2 ou 9 parties. Elles contiennent deux de leurs côtés et un seul de leurs sommets. Tout point du plan appartient à une maille ω_n et à une seule. Il est donc compris dans une seule famille régulière de mailles emboîtées $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, famille qui pourra servir à définir les dérivées en ce point.

54. Réseau spatial. — Le procédé précédent s'étend de lui-même à la construction d'un réseau R dans un espace $x, y, \ldots$

à p dimensions. Le réseau s'obtient par la construction d'un réseau linéaire sur chacun des axes de coordonnées.

Soient R_x, R_y, ... ces réseaux linéaires; $(\mathcal{G}_n)_x$, $(\mathcal{G}_n)_y$, ... leurs grillages; α_n, β_n, ... leurs mailles, supposées de même amplitude pour un même indice. Une maille ω_n du grillage $\mathcal{G}_n$ de R se définit par une combinaison de mailles α_n, β_n, ... de même indice. C'est donc un cube dans l'espace à p dimensions, provenant du partage d'une maille ω_{n-1} en 3^p parties égales. Un point P du plan appartient encore à une seule famille régulière de mailles emboîtées ω_1, ω_2, ..., propre au calcul des dérivées au point P.

Nous allons maintenant étudier les propriétés des dérivées qui se définissent à l'aide d'une famille de mailles.

55. **Dérivées sur un réseau.** — Soit $F(e)$ une fonction d'ensemble dans un espace x, y, ... à p dimensions. Construisons un réseau R. Les dérivées sur le réseau en un point P se définissent en considérant la famille régulière des mailles ω_1, ω_2, ..., ω_n, ... qui contiennent le point P. Ce sont donc les plus grande et plus petite limites du quotient

$$\frac{F(\omega_n)}{m\,\omega_n}$$

quand n tend vers l'infini.

Les dérivées sur un réseau sont des fonctions mesurables (B).

Attachons à chaque grillage $\mathcal{G}_n$ une fonction $\Phi_n(P)$ égale au quotient $F(\omega_n) : m\,\omega_n$ où ω_n désigne la maille qui contient le point P. Cette fonction Φ_n est mesurable (B), car elle est constante dans chaque maille ω_n et l'ensemble ω_n est une différence d'ensembles fermés ([1]). Les dérivées qui sont les plus grande et plus petite limites de Φ_n sont aussi mesurables (B).

L'avantage des dérivées sur un réseau dans les démonstrations provient d'une propriété, qui semble n'appartenir qu'à elles et qui est presque immédiate. Cette propriété est exprimée dans le théorème suivant :

56. **Théorème.** — *Soit* $F(e)$ *une fonction d'ensemble et soit* E

([1]) On a exclu de ω_n une portion fermée de sa frontière.

un ensemble borné quelconque, contenu dans un ensemble O *ouvert (sur l'espace entier). Si l'une des dérivées sur un réseau de* $F(e)$, *par exemple* $\overline{D}F$, *est positive en chaque point de* E, *alors on peut enfermer* E *dans un ensemble* Ω, *somme de mailles* ω *du réseau sans point commun deux à deux, de manière que* $F(\omega)$ *soit positif pour chacune de ces mailles et que* Ω *soit encore contenu dans l'ensemble* O.

En effet, tout point P de E appartient à une seule famille de mailles emboîtées $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots$ et comme P est un point intérieur de O, il y a toujours une première maille de la famille, ω_n par exemple, qui est contenue dans O et telle que $F(\omega_n)$ soit positif. Cette propriété de la maille ω_n subsiste alors à l'égard de tous les points de E qu'elle contient, et nous exprimerons cela en disant que ω_n est une maille *primitive* du grillage G_n. L'ensemble Ω est évidemment formé par la réunion des mailles primitives de chacun des grillages $G_1, G_2, \ldots$. Chaque grillage ne contient d'ailleurs qu'un nombre limité de mailles primitives (E étant borné).

Si la fonction $F(e)$ est additive, $F(\Omega)$ est évidemment positif, car c'est une somme de termes $F(\omega)$ positifs.

§ — Réseaux conjugués (¹).

57. Réseaux conjugués linéaires. — Considérons, sur un axe Ox, un premier réseau linéaire R, formé des grillages G_1, $G_2, \ldots$ dont les mailles $\omega_1, \omega_2, \ldots$ dérivent l'une de l'autre par partage en trois parties égales.

Nous pouvons former un grillage G'_1 en prenant comme nœuds les milieux des mailles ω_1 de G_1, un grillage G'_2 en prenant comme nœuds les milieux des mailles ω_2 de G_2, et ainsi de suite. Nous apercevons immédiatement que ces grillages $G'_1, G'_2, \ldots$ forment un réseau linéaire R', et que les deux réseaux linéaires R et R' sont dans une relation réciproque. Nous dirons donc que R et R' forment un système de deux *réseaux conjugués*.

(¹) La théorie des réseaux conjugués est exposée ici pour la première fois. Elle permet d'établir le théorème de Vitali sur lequel M. Lebesgue a fondé la dérivation des fonctions absolument continues d'ensemble (*Ann. Éc. Norm.*, 1910).

Leur utilité vient de la propriété suivante :

Tout intervalle donné sur Ox et d'amplitude α est tout entier contenu dans une maille d'amplitude $< 6\alpha$ de l'un au moins des deux réseaux conjugués. (*On suppose* $2\alpha < \omega_1$.)

Puisque la subdivision des mailles se fait en trois, il existe deux grillages conjugués $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}'_n$ dont les mailles sont d'amplitude intermédiaire entre 2α et 6α. Les nœuds de $\mathcal{G}_n$ sont alors à distance $> \alpha$ de ceux de $\mathcal{G}'_n$. Donc, si l'intervalle considéré d'amplitude α contient un nœud de $\mathcal{G}_n$, il n'en contient pas de $\mathcal{G}'_n$ et réciproquement ; il se trouve donc dans une maille d'amplitude $< 6\alpha$ de $\mathcal{G}'_n$ ou de $\mathcal{G}_n$.

58. **Réseaux conjugués spatiaux.** — Considérons maintenant un espace $x, y, \ldots$ à p dimensions. Construisons deux réseaux conjugués R_x, R'_x ; R_y, R'_y, ... sur chacun des axes coordonnés. En combinant tous les premiers réseaux linéaires R_x, R_y, ..., nous définissons un premier réseau spatial R. En remplaçant dans cette combinaison un ou plusieurs réseaux linéaires par leur conjugué, nous obtiendrons successivement tous les réseaux spatiaux *conjugués* de R. Un *système de réseaux conjugués* dans l'espace à p dimensions se compose donc de 2^p réseaux différents.

Voici la propriété qui généralise celle des réseaux linéaires :

Tout domaine rectangle, à côtés égaux α et de mesure α^p, est tout entier contenu dans une maille de mesure $< (6\alpha)^p$ de l'un au moins des réseaux conjugués.

Les projections du domaine considéré sur les axes sont, en effet, des intervalles égaux α_x, α_y, ... intérieurs à des mailles $< 6\alpha$ des réseaux linéaires correspondants (n° 57) ; et ces mailles linéaires définissent une maille d'amplitude $< (6\alpha)^p$ de l'un des réseaux conjugués dans l'espace. Celle-ci contient le domaine proposé.

59. **Principe de la dérivée nulle sur un système conjugué.** — *Si la dérivée d'une fonction additive, non négative, est nulle au point* P, *sur tous les réseaux d'un système conjugué, la dérivée reste nulle en ce point quelle que soit sa définition.*

En effet, nous allons montrer que, dans ce cas, la dérivée symé-

trique est nulle, ce qui ramène au principe concernant celle-ci (n° 51). Soit ω un domaine cubique de centre P qui tend vers zéro ; il est contenu dans une maille ω_n d'amplitude $\leq 6^p(m\omega)$ appartenant à l'un des réseaux conjugués. Or on a

$$\frac{F(\omega)}{m\omega} \leq \frac{F(\omega_n)}{m\omega} = \frac{m\omega_n}{m\omega}\,\frac{F(\omega_n)}{m\omega_n} \leq 6^p\,\frac{F(\omega_n)}{m\omega_n}.$$

Le premier quotient, qui est non négatif, tend donc vers zéro avec le dernier.

CHAPITRE V.

FONCTIONS D'ENSEMBLE ABSOLUMENT CONTINUES ET ADDITIVES. INTÉGRALES INDÉFINIES.

1. — Propriétés des dérivées sur un réseau.

60. **Remarques préliminaires.** — Nous avons défini précédemment (n° 47) les *fonctions absolument continues et additives* et nous avons établi qu'elles sont des *différences de deux fonctions de même nature non négatives*. Nous avons, à cette occasion, défini les *variations positive*, *négative* et *totale* d'une fonction.

Nous allons établir le lemme suivant :

Si une fonction F(*e*), *additive et absolument continue*, *a l'une de ses dérivées* (*sur un réseau* R) *partout positive dans un ensemble mesurable* E, F(E) *n'est pas négatif.*

L'ensemble E, étant mesurable, est contenu dans un ensemble ouvert O de mesure infiniment voisine. D'après une propriété générale des dérivées sur un réseau (n° 56), on peut enfermer E dans un ensemble Ω, somme de mailles ω et contenu dans O, de telle sorte que F(ω) soit positif dans chaque maille de Ω, auquel cas F(Ω) est positif (par la propriété additive). Mais, comme F est absolument continue et que la mesure de l'ensemble Ω — E tend vers zéro, F(Ω) a pour limite F(E) et F(E) est non négatif.

Nous allons tirer de là le principe suivant :

61. **Principe fondamental.** — *Soit* F(*e*) *une fonction absolument continue et additive. Si l'une de ses dérivées* (*sur un réseau* R), *par exemple* $\overline{D}$F, *est positive presque partout sur un ensemble* E *de mesure non nulle*, F(E) *est positif.* (De même, si $\underline{D}$F était négatif, F le serait aussi.)

Je dis d'abord que si $\overline{D}F$ est $> \varepsilon$ positif sur E de mesure non nulle, F(E) est positif. En effet, formons la fonction

$$\Phi(e) = F(e) - \varepsilon\, m(e).$$

Comme $\overline{D}\Phi$ (qui est égal à $\overline{D}F - \varepsilon$) est positif, $\Phi(E)$ est non négatif en vertu du lemme précédent ; donc F(E) est $\geq \varepsilon\, m(E)$ et, par conséquent, positif.

Supposons maintenant que $\overline{D}F$ soit positif presque partout sur E de mesure non nulle. La valeur de F sur E est la même que sur la portion E' de E (de même mesure que E) sur laquelle $\overline{D}F$ est positif. Or E' est la somme des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ formés respectivement des points de E' où $\overline{D}F$ est ≥ 1, où $\overline{D}F$ est $\geq \frac{1}{2}$ mais < 1, où $\overline{D}F$ est $\geq \frac{1}{3}$ mais $< \frac{1}{2}$, et ainsi de suite. Ces ensembles sont sans point commun, et ils ne sont pas tous de mesure nulle (car leur somme E' ne l'est pas). Donc F(E'), qui est la somme des quantités $F(E_n)$, non négatives et non toutes nulles, est positif.

62. Théorème de la dérivée nulle. — *Soit F(e) une fonction absolument continue et additive. Si l'une de ses dérivées (sur un réseau R), par exemple* $\overline{D}F$, *est nulle presque partout sur un ensemble E, alors* F(E) = 0.

En effet, quelque petit que soit ε positif, la fonction

$$F(e) \pm \varepsilon\, m(e)$$

aura, presque partout sur E, sa dérivée supérieure, $\overline{D}F \pm \varepsilon$, du signe attribué à ε ; donc elle aura elle-même sur E le signe attribué à ε (en vertu du principe qui précède), ce qui n'a lieu que si F(E) est nul.

63. Comparaison de deux fonctions. — *Si deux fonctions* F_1 *et* F_2, *absolument continues et additives, ont des dérivées de même espèce (sur un réseau R), par exemple* $\overline{D}F_1$ *et* $\overline{D}F_2$, *finies presque partout dans un ensemble E et satisfaisant presque partout à la relation* $\overline{D}F_1 \geq \overline{D}F_2$, *alors on en conclut* $F_1(E) \geq F_2(E)$.

Ce théorème revient aux deux précédents (nos 61 et 62), en observant que, si les dérivées sont finies, on a

$$\overline{D}(F_1 - F_2) \geq \overline{D}F_1 - \overline{D}F_2, \qquad \underline{D}(F_1 - F_2) \geq \underline{D}F_1 - \underline{D}F_2.$$

Il suit de là que *si deux fonctions* F_1 et F_2 *ont presque partout la même dérivée supérieure* (*inférieure*) *dans* E, *elles sont égales sur* E, car on peut renverser le sens des inégalités dans l'énoncé précédent.

64. Réciproque du théorème de la dérivée nulle. — *Si une fonction* F(*e*), *absolument continue et additive, s'annule sur tout ensemble e contenu dans un ensemble donné* E, *sa dérivée s'annule presque partout sur* E *quelle que soit la manière de la définir. De plus, les points qui font exception sont contenus dans un ensemble* H, *de mesure nulle, indépendant de la définition des dérivées* (*c'est-à-dire du choix de la famille régulière d'ensembles servant à les définir*).

Il n'y a de théorème à démontrer que si l'ensemble E n'est pas de mesure nulle. D'autre part, nous pouvons supposer F non négative, car si F s'annule sur toute partie de E, ses variations positive et négative (n° 48) s'annulent aussi et nous pouvons raisonner sur celles-ci, puisque F est leur somme.

Construisons un réseau R; la dérivée de F (sur ce réseau) sera unique et nulle presque partout dans E; car, dans le cas contraire, une dérivée supérieure (ou inférieure) serait partout positive ou partout négative dans une portion de E de mesure non nulle, et F ne s'annulerait pas sur celle-ci (n° 61).

Considérons maintenant un système de réseaux conjugués. La dérivée de F (sur chacun d'eux) est nulle presque partout. Soit H l'ensemble de mesure nulle des points où la dérivée n'est pas nulle quel que soit le réseau du système. En vertu du principe de la dérivée nulle sur un système conjugué (n° 59), l'ensemble H contient aussi tous les points où la dérivée n'est pas nulle, quelle que soit sa définition.

L'énoncé du théorème subsiste dans le cas où l'ensemble E serait *non borné* et s'étendrait même à tout l'espace, moyennant un complément de définition, donnant, dans ce cas, un sens aux termes de cet énoncé. Il suffira de convenir qu'un ensemble non

borné est *mesurable* s'il est mesurable à l'intérieur de tout domaine borné et qu'il est *de mesure nulle* s'il est de mesure nulle à l'intérieur de tout domaine borné. On conçoit alors qu'une condition puisse être réalisée *presque partout dans l'espace entier*.

Voici une application du théorème précédent :

Soit E un ensemble fixe ; F(eE) est fonction de l'ensemble e variable, et s'annule sur tout ensemble e contenu dans le complémentaire de E. Donc sa dérivée est nulle presque partout dans CE, quelle que soit sa définition.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant (n° 68), que les théorèmes que nous avons énoncés pour les dérivées sur un réseau subsistent avec la définition générale de la dérivée. Ces théorèmes sur la dérivée sur un réseau ont donc un caractère provisoire.

§ 2. — Dérivation des intégrales indéfinies.

65. Intégrale indéfinie. — Soit $f(P)$ une fonction univoque du point P, définie dans tout l'espace [1] et sommable sur tout ensemble borné. Si l'on considère l'ensemble e comme variable, l'intégrale,

$$F(e) = \int_e f(P)\,dP,$$

est ce que M. Lebesgue appelle une *intégrale indéfinie*. C'est une fonction d'ensemble absolument continue et additive. Nous nous proposons maintenant de montrer que ces deux propriétés des intégrales indéfinies les caractérisent, c'est-à-dire que toute fonction d'ensemble qui les possède est une intégrale indéfinie.

Nous allons d'abord considérer une intégrale particulière.

66. Densité. — Soient E un ensemble donné, borné ou non et *mesurable* (n° 64), $\varphi(P)$ sa fonction caractéristique ; formons l'intégrale indéfinie

$$F(e) = \int_e \varphi(P)\,dP,$$

sa valeur est $m(eE)$.

---

(1) Si f n'était définie que dans un domaine borné Δ, on compléterait sa définition en posant f nulle hors de Δ.

La dérivation de cette intégrale ou de la fonction

$$F(e) = m(e\mathrm{E})$$

conduit à une importante notion, introduite par M. Lebesgue [1], celle de la *densité* d'un ensemble E.

Les *densités supérieure* et *inférieure* de l'ensemble E au point P sont, par définition, les dérivées supérieure et inférieure de la fonction $F(e)$ en ce point. Cette définition se précise par la détermination de la famille régulière d'ensembles qui doit servir à calculer les dérivées. Les deux densités précédentes peuvent se désigner par $\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E}$ et $\underline{\mathrm{D}}\mathrm{E}$; si elles sont égales, la densité est déterminée au point P, nous la représenterons par DE.

Il existe une *relation de compléments* entre les densités supérieure et inférieure au point P de deux ensembles complémentaires (par rapport à tout l'espace), E et CE. Elle résulte de l'égalité

$$\frac{m(e\mathrm{E})}{me} + \frac{m(e.\mathrm{CE})}{me} = 1.$$

Puisque la somme est constante, si l'un des deux termes tend vers sa plus petite limite, l'autre tend vers la plus grande, et réciproquement. On a, par conséquent,

$$\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E} + \underline{\mathrm{D}}(\mathrm{CE}) = \underline{\mathrm{D}}\mathrm{E} + \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{CE}) = 1.$$

En particulier, si la densité de E est déterminée, celle de CE l'est aussi et elle est complémentaire de la première par rapport à l'unité.

Cette relation va nous servir dans la démonstration du théorème suivant, dû à M. Lebesgue :

La densité d'un ensemble E *est égale presque partout à* 1 *dans* E *et à* 0 *dans* CE. *De plus, les points qui font exception sont contenus dans un ensemble* H, *de mesure nulle, indépendant de la définition de la dérivée.*

En effet, la fonction $m(e\mathrm{E})$ étant nulle dans toute portion

---

[1] *Math. Ann.*, Bd LXI, 1905 ; *Annales de l'École Normale*, 1910. M. Lebesgue n'a utilisé cette notion que pour les ensembles linéaires. J'ai fait de la densité à peu près le même usage qu'ici dans la 2e édition du Tome II de mon *Cours d'Analyse*, 1911.

de CE, sa dérivée est nulle presque partout dans CE (n° 64). Donc la densité de E est nulle presque partout dans CE. De même, la densité de CE est nulle presque partout dans E, et alors celle de E est égale à 1 presque partout dans E, en vertu de la relation des compléments. De plus, les points qui font exception sont contenus dans des ensembles de mesure nulle, indépendants de la définition de la dérivée (n° 64), ce qui prouve le théorème.

67. **Dérivée d'une intégrale indéfinie.** — Soient $f(P)$ une fonction sommable et e un ensemble borné variable dans l'espace. Formons l'intégrale indéfinie

$$F(e) = \int_e f(P)\,dP.$$

Cette intégrale a pour dérivée $f(P)$ presque partout. De plus, les points exceptionnels de l'espace sont contenus dans un ensemble H *de mesure nulle* (n° 64), *indépendant de la définition particulière des dérivées.*

Soient α et β deux nombres rationnels ($\alpha < \beta$). Soit ensuite $E_{\alpha\beta}$ l'ensemble des points de l'espace où l'on a $\alpha \leq f < \beta$. Je vais d'abord démontrer que la dérivée de F est intermédiaire entre α et β pour tous les points de $E_{\alpha\beta}$, à l'exception d'un ensemble $H_{\alpha\beta}$ de mesure nulle.

A cet effet, je considère le complémentaire $CE_{\alpha\beta}$ par rapport à l'espace et je fais la décomposition

$$F(e) = F(eE_{\alpha\beta}) + F(e.CE_{\alpha\beta}).$$

La dérivée de $F(e.CE_{\alpha\beta})$ est nulle dans presque tout $E_{\alpha\beta}$ (n° 64). Donc, dans presque tout $E_{\alpha\beta}$, la dérivée de $F(e)$ est celle du premier terme ou de l'intégrale

$$F(eE_{\alpha\beta}) = \int_{eE_{\alpha\beta}} f(P)\,dP.$$

Mais on a, par le théorème de la moyenne,

$$\alpha m(eE_{\alpha\beta}) \leq F(eE_{\alpha\beta}) \leq \beta m(eE_{\alpha\beta}).$$

Donc la dérivée de ce terme est intermédiaire entre α et β en tout point où la densité de $E_{\alpha\beta}$ est 1, donc dans presque tout $E_{\alpha\beta}$.

Alors la dérivée de $F(e)$ est comprise entre α et β sur tout $E_{\alpha\beta}$, à l'exception d'un ensemble $H_{\alpha\beta}$ de mesure nulle.

Ce premier point établi, formons toutes les combinaisons de deux nombres rationnels $\alpha < \beta$ et considérons l'infinité dénombrable des ensembles correspondants $E_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$. Soit H l'ensemble (de mesure nulle) somme des $H_{\alpha\beta}$. Je dis qu'en tout point P exclu de H, $F(e)$ a pour dérivée $f(P)$. En effet, cette dérivée est intermédiaire entre α et β pourvu seulement que $E_{\alpha\beta}$ contienne P, ou que l'on ait

$$\alpha < f(P) < \beta,$$

ce qui n'a lieu que si $DF = f(P)$. Le théorème est donc établi.

68. **Théorème.** — *Une fonction d'ensemble additive et absolument continue a ses dérivées finies presque partout et sommables sur tout ensemble mesurable et borné; elle est l'intégrale indéfinie de chacune d'elles.*

Il suffit d'établir ce théorème pour les dérivées sur un réseau; il subsistera pour les autres dérivées, en vertu du théorème précédent. Enfin on peut supposer la fonction non négative, car le théorème, vrai pour deux fonctions, subsiste pour leur différence.

Soit donc DF l'une des dérivées (sur un réseau) d'une fonction $F(e)$ non négative. Je pose $(DF)_n$ égal à DF ou à n selon que DF est $< n$ ou non, et je dis que l'intégrale de $(DF)_n$ sur e donné est bornée quel que soit n. En effet, elle a presque partout une dérivée $(DF)_n$ égale ou inférieure à DF; donc elle ne surpasse pas $F(e)$, en vertu d'un théorème connu (nº 63). L'intégrale de $(DF)_n$ étant bornée, DF est sommable par définition; et l'on a enfin

$$F(e) = \int_e (DF)\, dP,$$

parce que les deux membres ont la même dérivée DF presque partout (nº 63).

Nous avons ainsi établi l'identité des intégrales indéfinies et des fonctions additives et absolument continues [1].

Cette conclusion prouve, en particulier, que les théorèmes con-

---

[1] Ce résultat est dû à M. Lebesgue (*Ann. Éc. Norm.*, 1910).

cernant les dérivées sur un réseau, énoncés au paragraphe précédent, subsistent quelle que soit la définition de la dérivée, puisque cette définition ne peut avoir d'influence que dans un ensemble de mesure nulle.

69. Expressions des variations positive, négative et totale. — Considérons une fonction, additive et absolument continue,

$$F(e)=\int_e DF\,dP.$$

Sa variation positive sur e est la borne supérieure de ses valeurs sur tous les ensembles contenus dans e. Cette borne est atteinte dans la portion de e où DF est positif. Désignons donc par E_1 l'ensemble des points de l'espace où DF est ≥ 0, par E_2 celui des points où DF est < 0 ; la décomposition de $F(e)$ dans ses *variations positive* et *négative* se fait par la formule

$$F(e)=\int_{eE_1}+\int_{eE_2} DF\,dP = F(eE_1)+F(eE_2).$$

La *variation totale* de F sur e sera donc

$$\Phi(e)=\int_e |DF|\,dP = F(eE_1)-F(eE_2).$$

3. — Majorante et minorante.

70. Définition et construction. — Considérons une intégrale indéfinie

$$F(e)=\int_e f(P)\,dP.$$

Donnons-nous un domaine rectangulaire borné Δ. Nous supposerons que l'ensemble e et le point P varient à l'intérieur de Δ et n'en sortent pas. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Il est possible de définir une fonction $G(e)$ additive, absolument continue et non négative, telle que si l'on forme les deux fonctions

$$F_n(e)=F(e)+\frac{G(e)}{n},\qquad F'_n(e)=F(e)-\frac{G(e)}{n},$$

où n est un nombre positif arbitraire, la fonction F_n ait toutes

ses dérivées $>f$ *aux points* P *où* f *n'est pas infini positif, la fonction* F_2 *toutes les siennes* $<f$ *aux points où* f *n'est pas infini négatif.*

Ces fonctions F_1 *et* F_2 *sont les majorante et minorante de l'intégrale de* f; *elles approchent autant qu'on veut de cette intégrale à condition de donner à* n *une valeur suffisamment grande.*

Désignons par $\Phi(e)$ la variation totale de F, à savoir (n° 69)

$$\Phi(e) = \int_e |f| \, dP.$$

Soit H (de mesure nulle) l'ensemble des points du domaine Δ où f n'est pas la dérivée *unique* et *finie* de F. Donnons-nous une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ positive, décroissante et de somme finie. Désignons par $O_1 > O_2 > \ldots > O_k \ldots$ des ensembles ouverts emboîtés, contenus dans Δ et contenant H, satisfaisant (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$) à la condition générale

$$m O_k + \Phi(O_k) < \varepsilon_k,$$

condition à laquelle il est possible de satisfaire, parce que H est borné et de mesure nulle et que Φ est absolument continue.

Je dis que l'on satisfera aux conditions du théorème énoncé, en définissant la fonction θ par la série uniformément convergente

$$\theta(e) = me + \sum_{k=1}^{\infty} [m(eO_k) + \Phi(eO_k)].$$

Nous allons le démontrer.

Considérons d'abord un point du complémentaire de H, donc un point où F a pour dérivée unique et finie f. Comme tous les termes de θ sont non négatifs et que la dérivée du premier terme, me, est 1, toute dérivée de θ est $\geqq 1$. Donc les dérivées de F_1 sont $\geqq f + \frac{1}{n}$, et celles de F_2 sont $\leqq f - \frac{1}{n}$, ce qui prouve le théorème pour un point de CH.

Considérons maintenant un point de H, donc un point intérieur à tous les ensembles O_k. On a d'abord

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(eO_k) \geqq \sum_{k=1}^{n} \Phi(eO_k) \geqq n\,\Phi(eO_n).$$

Par conséquent,

$$F_1(e) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} m(eO_k) + [\Phi(eO_p) - F(e)],$$

$$F_2(e) \leq -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} m(eO_k) - [\Phi(eO_p) - F(e)].$$

Mais, au voisinage d'un point P intérieur à O_p, $\Phi(eO_p)$ est identique à $\Phi(e)$. Par conséquent, puisque les fonctions $\Phi \mp F$ sont non négatives, on a, au voisinage de ce point P,

$$F_1(e) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} m(eO_k), \qquad F_2(e) \leq -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} m(eO_k).$$

Au point P, qui est intérieur à tous les O_k, la dérivée de $m(eO_k)$ est 1 quel que soit k ; donc celle de F_1 est $+\infty$, et celle de F_2 est $-\infty$. Ainsi, la dérivée de F_1 est plus grande que f supposé différent de $+\infty$, et celle de F_2 est plus petite que f supposé différent de $-\infty$. Le théorème est donc exact aussi pour un point de H, ce qui achève la démonstration.

Il ne serait pas difficile de montrer que l'on peut compléter la définition de la fonction $\mathfrak{F}$, de manière que le théorème subsiste quand e varie dans tout l'espace (et non dans Δ borné seulement). Mais nous ne nous arrêterons pas à faire cette démonstration (¹).

§ 3. — Fonction absolument continue d'une variable x. Fonction d'ensemble qu'elle définit.

71. Position de la question. — Soit $f(x)$ une fonction continue de x dans un intervalle (a, b). Cette fonction de point définit immédiatement ce que l'on peut appeler une *fonction d'intervalle*. En effet, soit (α, β) un intervalle compris dans (a, b). Cet intervalle est un ensemble de points que nous désignerons aussi par ω.

(¹) J'ai défini, pour la première fois, les majorante et minorante d'intégrales simples dans mon *Cours d'Analyse*, t. I, 2e édition, [illegible]; M. Lebesgue a considéré des majorante et minorante d'intégrales multiples dans son Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 1910. Je leur ai donné les noms de *majorante* et *minorante* dans la 3e édition du Tome I de mon *Cours*, 1914. C'est dans mon Mémoire des *Transactions of the American mathematical Society*, 1915, que je leur ai donné, à un détail près, la forme plus précise qu'elles reçoivent ici.

Or nous pouvons définir une fonction $p(\omega)$ d'intervalle, en posant

$$p(\omega) = f(\beta) - f(\alpha).$$

Cette fonction p est additive pour deux, donc pour plusieurs intervalles. Cela veut dire que si l'on décompose ω en un nombre limité de parties consécutives ω', ω'', ..., on a

$$p(\omega) = p(\omega') + p(\omega'') + \ldots.$$

Cette propriété permet d'étendre, sans ambiguïté, la définition de p à tout ensemble $\mathcal{E}$ formé d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, contenus dans (a, b). On définit $p(\mathcal{E})$ comme la somme des valeurs $p(\omega)$ étendue à tous les intervalles ω constitutifs de $\mathcal{E}$.

Nous dirons que $p(\mathcal{E})$ est une fonction absolument continue d'intervalle si $p(\mathcal{E})$ tend vers zéro avec $m\mathcal{E}$, quel que soit l'ensemble $\mathcal{E}$ (toujours formé d'un nombre fini d'intervalles). Si $p(\mathcal{E})$ vérifie cette condition, nous dirons aussi, avec M. Vitali, que la fonction de point initiale, $f(x)$, est une *fonction absolument continue de* x.

Nous posons alors la question suivante :

Étant donnée une fonction absolument continue $f(x)$, *ou, ce qui revient au même, une fonction additive et absolument continue d'intervalle*, $p(\mathcal{E})$; *existe-t-il une fonction absolument continue d'ensemble mesurable*, $p(\mathrm{E})$, *qui coïncide avec* $p(\mathcal{E})$ *sur les intervalles ?*

Ce problème rentre dans un autre plus général, que nous traiterons au Chapitre suivant, mais celui-ci se résout plus simplement. La réponse est affirmative et l'on s'en assure aisément, comme il suit, grâce à la continuité absolue.

72. Construction de la fonction d'ensemble. — Soit E un ensemble mesurable. Je vais d'abord montrer que l'on peut définir un ensemble variable $\mathcal{E}$, formé d'un nombre fini d'intervalles, satisfaisant à une relation de la forme

$$\mathrm{E} + e_1 = \mathcal{E} - e_2, \tag{1}$$

dans laquelle e_1 et e_2 sont deux ensembles de mesure infiniment petite. En effet, étant mesurable, E est contenu dans un ensemble ouvert, O, de mesure infiniment voisine de la sienne, que nous

pouvons donc mettre sous la forme $E + e_1$. D'autre part, O est une somme d'intervalles et peut, par conséquent, se mettre aussi sous la forme $\mathcal{E} + e_2$, ce qui justifie la relation (1).

Je dis que, les mesures de e_1 et de e_2 tendant vers zéro, on peut définir $p(E)$ par la formule

$$p(E) = \lim p(\mathcal{E}).$$

Il faut, pour le justifier, prouver que cette limite existe. A cet effet, il faut montrer que si l'on considère une autre relation analogue à (1),

$$(2) \qquad E + e'_1 = \mathcal{E}' + e'_2,$$

dans laquelle e'_1 et e'_2 sont aussi de mesure infiniment petite, les valeurs $p(\mathcal{E})$ et $p(\mathcal{E}')$ seront infiniment voisines.

Pour obtenir cette conclusion, multiplions entre elles les relations (1) et (2), nous en tirerons, en désignant par e''_1 et e''_2 de nouveaux ensembles de mesure infiniment petite,

$$E + e''_1 = \mathcal{E}\mathcal{E}' + e''_2.$$

Les mesures de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}\mathcal{E}'$ sont infiniment voisines de celles de E, donc infiniment voisines entre elles. Mais $\mathcal{E}\mathcal{E}'$ est somme d'un nombre fini d'intervalles ; il est contenu dans $\mathcal{E}$ et aussi dans $\mathcal{E}'$: donc $\mathcal{E} - \mathcal{E}\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}' - \mathcal{E}\mathcal{E}'$ sont sommes d'intervalles en nombre fini et sont de mesure infiniment petite. Donc enfin, à cause de la continuité absolue et de la propriété additive sur les intervalles, les deux quantités

$$p(\mathcal{E} - \mathcal{E}\mathcal{E}') = p(\mathcal{E}) - p(\mathcal{E}\mathcal{E}'),$$
$$p(\mathcal{E}' - \mathcal{E}\mathcal{E}') = p(\mathcal{E}') - p(\mathcal{E}\mathcal{E}')$$

sont infiniment petites et $p(\mathcal{E})$ est infiniment voisin de $p(\mathcal{E}')$, car tous deux sont infiniment voisins de $p(\mathcal{E}\mathcal{E}')$.

La fonction $p(E)$, ainsi définie, est absolument continue, car si la mesure de E est infiniment petite, celle de $\mathcal{E}$ l'est aussi et $p(E)$ est infiniment petit avec $p(\mathcal{E})$.

La fonction $p(E)$ est additive pour deux ensembles E et E' sans point commun. Posons, en effet, les e étant de mesure infiniment petite,

$$E + e_1 = \mathcal{E} + e_2, \qquad E' + e'_1 = \mathcal{E}' + e'_2 ;$$

d'où, en multipliant et observant que EE′ est nul,

$$e_1 \mathcal{E} + e_2 \mathrm{E} + e_1 e_2 = \mathcal{E}\mathcal{E}' + e_2''.$$

Cette relation prouve que $\mathcal{E}\mathcal{E}'$ est de mesure infiniment petite. Ceci établi, nous pouvons écrire, à cause de la propriété additive sur les intervalles,

$$p(\mathcal{E}) + p(\mathcal{E}') = p(\mathcal{E} + \mathcal{E}') + p(\mathcal{E}\mathcal{E}');$$

et, à la limite,

$$p(\mathrm{E}) + p(\mathrm{E}') = p(\mathrm{E} + \mathrm{E}').$$

Donc la fonction *est additive pour un nombre fini d'ensembles*, mais elle le reste encore *pour une infinité d'ensembles sans point commun deux à deux*. Soit, en effet,

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots = (\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_n) + \rho_n.$$

Comme $m\rho_n$ tend vers zéro, $p(\rho_n)$ tend aussi vers zéro pour $n = \infty$. Par conséquent,

$$p(\mathrm{E}) = \lim\,[p(\mathrm{E}_1) + p(\mathrm{E}_2) + \ldots + p(\mathrm{E}_n)],$$

ce qui est la propriété additive.

73. **Nombres dérivés de $f(x)$.** — On appelle *nombres dérivés* de $f(x)$ au point x quatre limites qui se définissent en ce point au moyen du quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

où h tend vers zéro.

Les *nombres dérivés supérieur et inférieur à droite*, Λ et λ, sont les plus grande et plus petite limites de ce quotient quand h est infiniment petit positif; les *nombres dérivés supérieur et inférieur à gauche*, Λ' et λ', sont les limites analogues quand h est infiniment petit négatif. Ce sont des fonctions de x *mesurables* (B), car ce sont les limites pour $h = 0$ du quotient indiqué ci-dessus, qui est fonction continue de x et du paramètre h (nº 28). Ces nombres, par leur définition même, sont complètement identiques aux dérivées (ou nombres dérivés) de même nom (nº 50) de la fonction d'ensemble $p(e)$ définie au moyen de $f(x)$.

Nous obtenons donc la conclusion suivante :

Une fonction absolument continue, $f(x)$, définit une fonction additive et absolument continue d'ensemble mesurable qui admet les mêmes nombres dérivés supérieur et inférieur, à droite et à gauche, que $f(x)$.

Il suit de là que les théorèmes que nous avons établis précédemment sur les fonctions d'ensemble se traduisent en théorèmes correspondants sur les fonctions absolument continues d'une variable x. Nous nous contenterons d'énoncer le suivant :

74. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre dérivé, Λ, d'une fonction $f(x)$ soit sommable dans un intervalle (a, b) et pour que l'on ait, quel que soit x dans cet intervalle,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \Lambda \, dx$$

est que la fonction $f(x)$ soit absolument continue dans l'intervalle (a, b) [1].

Cette condition est nécessaire puisque le second membre est une fonction absolument continue. Elle est suffisante, car, si l'on désigne par e l'intervalle (a, x), elle est équivalente à l'équation connue (n° 68)

$$p(e) = \int_e \Lambda \, dx.$$

5. — Fonction absolument continue de deux variables x et y.

75. Position de la question. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et de y dans un domaine Ω. Nous allons montrer comment on peut en déduire la définition d'une fonction additive de rectangles, $p(\omega)$. Désignons par ω le rectangle parallèle aux axes, ayant le point (x, y) comme sommet de plus petites coor-

---

[1] Ce résultat a été obtenu, sous une autre forme, par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration* (Collection Borel, 1904, p. 128). C'est M. Vitali qui a démontré pour la première fois le théorème sous la forme indiquée ici. Voir le Mémoire cité (*R. Acc. d. Sc. di Torino*, 1905).

données, et ayant ses côtés de longueurs h et k. Si l'on donne ω, on peut calculer la différence seconde

$$\Delta^2 f = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y).$$

Celle-ci est donc une fonction du rectangle ω et l'on peut poser

$$p(\omega) = \Delta^2 f.$$

Cette fonction p est *additive* pour les rectangles, c'est-à-dire que, si l'on partage ω dans la somme d'un nombre limité de rectangles ω', ω'', ..., on a

$$p(\omega) = p(\omega') + p(\omega'') + \ldots.$$

Il suit de là que l'on peut définir, sans ambiguïté, la valeur de la fonction p sur tout ensemble $\mathcal{E}$ somme d'un nombre fini de rectangles. On posera $p(\mathcal{E})$ égal à la somme des valeurs $p(\omega)$ sur les rectangles composants et le résultat sera le même pour toutes les décompositions possibles de $\mathcal{E}$.

Si $p(\mathcal{E})$ tend vers zéro avec $m\mathcal{E}$, la fonction est absolument continue et la fonction initiale $f(x, y)$ est, par définition, une fonction *absolument continue* de x et de y. Nous nous posons alors la même question que dans le cas d'une seule variable :

Étant donnée une fonction absolument continue $f(x, y)$, ou une fonction additive et absolument continue de rectangle $p(\mathcal{E})$, existe-t-il une fonction additive et absolument continue d'ensemble mesurable, $p(E)$, qui coïncide avec $p(\mathcal{E})$ sur les rectangles?

La réponse est affirmative [1] et se justifie de la même manière que dans le cas d'une seule variable. En effet, à tout ensemble E mesurable on peut faire correspondre un ensemble $\mathcal{E}$, somme d'un nombre fini de rectangles, lié à E par la formule

$$E + e_1 = \mathcal{E} + e_2.$$

C'est le point de départ de la démonstration (n° 72) et il est inutile de la recommencer.

---

[1] Ce résultat est encore dû à M. Lebesgue, qui l'a obtenu en suivant une marche inverse de la nôtre (*Ann. Éc. Norm.*, 1910). Le procédé indiqué ici est celui de notre Mémoire des *Transactions of the american mathematical Society*, 1915.

76. Conclusion. — Les théorèmes que nous avons établis sur les fonctions d'ensemble se traduisent donc encore en théorèmes correspondants sur la fonction $f(x, y)$. Indiquons cette transformation dans le cas le plus simple.

Soit $\mathrm{D}p$ l'une des dérivées de p. Nous avons, sur le rectangle ω, défini plus haut,

$$p(\omega) = \int_{\omega} \mathrm{D}p \, d\mathrm{P}.$$

Le calcul de $\mathrm{D}p$ peut se faire au moyen d'une famille de rectangles, ω', ayant au point $\mathrm{P}(x', y')$ leur sommet de plus petites coordonnées, et dont les côtés h' et k' tendent vers zéro. Mais, pour que la famille soit régulière, il faut que le rapport $h' : k'$ reste compris entre deux nombres positifs fixes (non nuls). On peut alors prendre comme dérivée $\mathrm{D}p$ la plus grande ou la plus petite limite du quotient

$$\frac{p(\omega')}{m\omega'} = \frac{\Delta^2 f}{h'k'},$$

où la différence $\Delta^2 f$ est relative aux accroissements infiniment petits h' et k'. L'équation précédente peut alors s'écrire

$$\Delta^2 f(x, y) = \int_{\omega} \left(\lim \frac{\Delta^2 f}{h'k'} \right) d\mathrm{P},$$

mais Δ^2 est relatif à h, k dans le premier membre et à h', k' dans le second [1].

Ceci montre que les dérivées de fonctions d'ensemble superficiel correspondent à des dérivées secondes de fonctions de point. On voit facilement la manière d'étendre cette théorie à l'espace. Les dérivées de fonctions d'ensemble à n dimensions correspondent à des dérivées d'ordre n de fonctions de point.

---

(1) Ce théorème a été donné, sous une forme différente, par M. Vitali dans le Mémoire cité (*R. Acc. d. Sc. di Torino*, 1908).

CHAPITRE VI.

FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE NORMAL.

1. — Théorèmes généraux sur les fonctions additives (1).

77. Famille close d'ensembles. — Nous dirons qu'une famille d'ensembles est *close* si elle contient les domaines rectangulaires fermés et si les sommes, différences et produits, finis ou infinis, d'ensembles de cette famille appartiennent encore à celle-ci. Ainsi les ensembles mesurables (B) et les ensembles mesurables de Lebesgue forment des familles closes. Toute famille close contient nécessairement tous les ensembles mesurables (B), car ceux-ci se déduisent des domaines par les opérations précédentes.

Une fonction $f(e)$ est une *fonction d'ensemble dans une famille close* $\mathfrak{F}$ si elle est définie sur tous les ensembles bornés de la famille $\mathfrak{F}$.

Une fonction d'ensemble est *additive* (au sens complet) dans une famille close $\mathfrak{F}$ si elle est additive pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles non empiétants de la famille $\mathfrak{F}$ et contenus dans un domaine borné.

Une fonction additive est *finie*, par hypothèse, sur les ensembles bornés de la famille $\mathfrak{F}$, car l'addition (ou la soustraction) des quantités infinies n'a pas de sens. Mais on peut aller plus loin, comme le montrent les théorèmes du numéro suivant.

78. Propriétés des fonctions additives d'ensemble dans une famille close. — 1° *Une fonction $f(e)$, additive dans une famille close, est bornée sur la totalité des ensembles de la famille qui*

(1) Nous précisons ici les théorèmes de notre Mémoire des *Transactions of the american mathematical Society*.

sont contenus dans un ensemble borné donné e_1. Nous dirons, en abrégé, qu'elle est bornée à l'intérieur de e_1.

Je vais d'abord montrer que si f n'est pas bornée à l'intérieur de e_1, on peut constituer une suite illimitée d'ensembles

$$e_1 > e_2 > e_3 \dots$$

tels qu'on ait, quel que soit n,

$$|f(e_n - e_{n+1})| > 1.$$

A cet effet, partageons e_1 en deux parties e_2 et $e_1 - e_2$; par hypothèse, nous pouvons, en faisant varier e_2, faire croître autant que nous voulons le module de $f(e_2)$, donc aussi celui de $f(e_1 - e_2)$ qui a une valeur complémentaire; nous pouvons donc les rendre tous les deux à la fois > 1. Mais il y a au moins un des deux ensembles e_2 ou $e_1 - e_2$ à l'intérieur duquel f n'est pas bornée, et nous pouvons choisir la notation de manière que cet ensemble soit e_2. Après avoir ainsi défini e_2, nous pouvons recommencer le même raisonnement sur e_2 pour en extraire e_3, et ainsi de suite. Les ensembles $e_1, e_2, e_3, \dots$ satisfont aux conditions proposées.

Soit e l'ensemble $e_1 e_2 e_3 \dots$; nous avons

$$e_1 = e + (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + \dots + (e_n - e_{n+1}) + \dots$$

et les ensembles $e_n - e_{n+1}$ n'empiètent pas. Il en résulte que la fonction f ne peut être additive, car la relation

$$f(e_1) = f(e) + f(e_1 - e_2) + \dots + f(e_n - e_{n+1}) + \dots$$

n'a pas lieu, la série (dont le terme général est de module > 1) étant divergente.

2° *Une fonction $f(e)$, additive dans une famille close $\mathfrak{F}$, est la différence de deux fonctions additives, non négatives.*

Désignons par $\varphi(e_1)$ la borne supérieure de $f(e)$ pour la totalité des ensembles $e < e_1$ faisant partie de la famille $\mathfrak{F}$. Cette fonction de e_1 est additive et non négative, comme nous l'avons prouvé au n° 48 (1).

---

(1) Le fait de considérer la famille $\mathfrak{F}$ au lieu de celle des ensembles mesurables ne change pas la démonstration.

La fonction $\varphi(e)$ est la *variation positive* de f dans e, la fonction $\varphi - f$ est la valeur absolue de sa *variation négative*. La fonction f elle-même est la différence de ces deux fonctions, à savoir

$$f = \varphi - (\varphi - f).$$

Enfin la somme $2\varphi - f$ est la *variation totale* Φ. Les deux fonctions $\Phi \pm f$ sont donc non négatives et Φ est $\geqq |f|$.

3° *Si un ensemble borné, e, est limite des ensembles $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ faisant partie d'une famille close dans laquelle la fonction $f(e)$ est additive, on a*

$$f(e) = \lim f(e_n).$$

Considérons d'abord deux cas particuliers :

1° Si $e_1 < e_2 < e_3 \ldots$, le théorème revient à la propriété additive, car on a

$$\begin{aligned} f(e) &= f(e_1) + f(e_2 - e_1) + f(e_3 - e_2) + \ldots \\ &= f(e_1) + [f(e_2) - f(e_1)] + [f(e_3) - f(e_2)] + \ldots \\ &= \lim f(e_n). \end{aligned}$$

2° Si $e_1 > e_2 > e_3 \ldots$, le théorème se ramène au cas précédent par les complémentaires.

Passons au cas général. Il suffit, en vertu du théorème précédent, de faire la démonstration pour une fonction non négative. Si l'ensemble e est limite unique de $e_1, e_2, \ldots$, on a

$$e = \lim_{n=\infty} (e_n + e_{n+1} + \ldots) = \lim_{n=\infty} (e_n e_{n+1} \ldots).$$

Ces deux limites rentrent respectivement dans chacun des deux cas particuliers précédents. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} f(e) &= \lim f(e_n + e_{n+1} + \ldots) \geqq \lim f(e_n), \\ f(e) &= \lim f(e_n e_{n+1} \ldots) \leqq \lim f(e_n), \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

79. Ensembles normaux. — Soit $f(e)$ une fonction additive dans une famille close $\mathfrak{F}$. Nous définissons les *ensembles normaux* de la manière suivante :

Un ensemble E de la famille $\mathfrak{F}$ est *normal* relativement à f si, quel que soit ε positif donné, on peut assigner un ensemble ouvert $O > E$ et un ensemble fermé $F < E$, tels que les conditions $O > E' > E'' > F$ entraînent la relation

$$(1) \qquad |f(E' - E'')| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, nous considérons exclusivement les ensembles de la famille $\mathfrak{F}$.

Il y a lieu d'observer que les relations

$$|f(O - E)| < \varepsilon, \qquad |f(E - F)| < \varepsilon$$

sont des cas particuliers (et non des cas limites) de la précédente (tout ensemble se contenant lui-même).

1° *Si* E *est normal, son complémentaire par rapport à un domaine borné,* CE, *l'est aussi.*

En effet, CO est un ensemble fermé $\leq$ CE, CF est ouvert et $>$ CE; et l'on a

$$CF > CE'' \geq CE \geq CO, \qquad CE'' - CE' = E' - E'',$$

et réciproquement.

2° *Si* E *est normal relativement à la variation totale* Φ *de* f, E *est normal aussi par rapport à* f.

En effet, Φ est $\geq |f|$; donc, si la relation (1) est vérifiée par Φ, elle est vérifiée *a fortiori* par f.

La réciproque est vraie; elle est contenue dans le théorème suivant :

3° *Si* E *est normal relativement à* f, E *est encore normal relativement aux variations positive, négative et totale de* f.

Il suffit de prouver ce théorème pour la variation positive φ. Or je dis que si la condition (1) a lieu pour f, elle a lieu aussi pour φ. En effet, soit e un ensemble variable dans $E' - E''$; on a, par définition, puis par la condition (1),

$$\varphi(E' - E'') = \overline{\text{borne}}\, f(e) = \overline{\text{borne}}\, f(e + E'' - E'') < \varepsilon,$$

car $(e + E'')$ est assujetti aux mêmes conditions que E'.

Il suit des deux théorèmes précédents qu'il suffit de considérer les ensembles normaux relativement à une fonction non négative.

Si f est non négative, la condition nécessaire et suffisante pour que E soit normal se simplifie. Il suffit, en effet, que l'on puisse, quel que soit ε, assigner deux ensembles $O > E$ et $F < E$, tels que l'on ait

$$(2) \qquad f(O - F) < \varepsilon,$$

car cette condition entraîne *a fortiori* la relation (1).

80. **Théorème.** — *Les ensembles normaux* (*relativement à* f) *constituent une famille close. Ainsi, tous les ensembles mesurables* (B) *sont normaux.*

Nous pouvons, dans la démonstration, supposer f non négative.

Il faut d'abord prouver que les sommes, différences et produits d'ensembles normaux sont normaux; mais il suffit de considérer l'addition, car les autres opérations s'y ramènent par les complémentaires.

Soient $E_1, E_2, \ldots$ des ensembles normaux, E leur somme (finie ou infinie), $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ une série positive de somme $< \varepsilon$. Je dis que E est normal.

En effet, pour chaque indice, nous pouvons réaliser la condition (2) sous la forme

$$f(O_n - F_n) < \varepsilon_n, \qquad O_n > E_n > F_n.$$

Posons

$$O = O_1 + O_2 + \ldots, \qquad H = F_1 + F_2 + \ldots;$$

nous aurons

$$O > E > H, \qquad O - H < (O_1 - F_1) + (O_2 - F_2) + \ldots.$$

Par conséquent, f étant non négative et additive,

$$f(O - H) < f(O_1 - F_1) + f(O_2 - F_2) + \ldots < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon.$$

Si la somme est finie, O est ouvert et H fermé; E est normal. Si la somme est infinie, O est encore ouvert, mais peut-être que H n'est pas fermé. Mais H est somme d'ensembles fermés, donc limite d'un ensemble fermé F qui est $< H < E$. Nous pouvons supposer F suffisamment voisin de H, et ainsi (n° 78, 3°)

$f(O - F)$ suffisamment voisin de $f(O - H)$, pour avoir encore $f(O - F) < \varepsilon$, et la conclusion subsiste.

Nous avons fait entrer dans la définition d'une famille close la condition de contenir les domaines fermés. Il reste donc encore à prouver qu'un domaine rectangulaire fermé F est normal relativement à f, non négative. Ceci est immédiat. F est intérieur à un domaine ouvert $O > F$ qui a pour limite F; et, dans ce cas, la différence

$$f(O) - f(F) = f(O - F)$$

a pour limite zéro (n° 78, 3°). On peut donc certainement choisir O de manière à vérifier la condition (2) du numéro précédent.

La fonction $f(e)$, considérée exclusivement dans la famille close des ensembles normaux e, est une *fonction additive d'ensemble normal*.

81. Théorème. — *Une fonction additive d'ensemble normal est complètement définie par les valeurs qu'elle prend sur les domaines rectangulaires (sur les intervalles dans le cas linéaire).*

Je dis d'abord que si une telle fonction s'annule sur les domaines, elle s'annule sur tout ensemble normal. En effet, elle s'annule sur les ensembles ouverts (qui sont sommes de domaines) et sur les ensembles F (qui sont leurs complémentaires); donc elle s'annule sur un ensemble normal E; car, par suite de la définition, on peut faire varier O et F de manière que $f(O)$ et $f(F)$ tendent vers $f(E)$.

Maintenant, il apparaît immédiatement que deux fonctions f_1 et f_2 qui ont les mêmes valeurs sur les domaines coïncident sur les ensembles normaux communs, car leur différence $f_1 - f_2$ est une fonction d'ensemble normal qui s'annule sur les domaines et, par conséquent, sur les ensembles normaux.

Appliquons ces considérations à la *mesure des ensembles*. Les ensembles mesurables forment une famille normale; la mesure *donnée sur les domaines* est donc définie sur les ensembles mesurables (B) par la seule condition d'être additive, et sur les autres, par la condition d'être une fonction d'ensemble normal.

Cette condition peut remplacer celle d'être non négative admise au Chapitre II.

82. Fonction d'ensemble continue, discontinue. Fonction des sauts. — Nous allons considérer désormais une fonction additive d'ensemble normal, $f(e)$. La famille $\mathfrak{F}$ des ensembles normaux est donc une famille close, qui contient toujours celle des ensembles mesurables (B). Rien n'empêche d'admettre qu'elle se réduise à celle-là.

Une fonction $f(e)$ d'ensemble normal est *continue* dans un domaine borné Δ, si elle tend vers zéro avec le diamètre de e supposé $< \Delta$; elle est *absolument continue* si elle tend vers zéro avec la mesure de e supposé mesurable. Une fonction qui n'est pas continue est *discontinue*.

Nous allons montrer qu'une fonction discontinue est la somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue de nature très simple.

Considérons d'abord une fonction $f(e)$ non négative. Soit P un point; désignons par ω un domaine rectangulaire de centre P (un intervalle, dans le cas linéaire). Si $f(\omega)$ tend vers zéro avec le diamètre de ω, la fonction f est continue au point P; dans le cas contraire, le point P étant l'ensemble limite de ω, on a

$$\lim f(\omega) = f(\mathrm{P})$$

et la fonction d'ensemble n'est pas nulle sur le point P. Dans ce cas, P est un *point de discontinuité*.

L'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. En effet, dans un domaine borné Δ, on peut dénombrer les points P de discontinuité par l'ordre de grandeur de $f(\mathrm{P})$, car il n'y a qu'un nombre limité de points où $f(\mathrm{P})$ est $> \varepsilon$ [sinon $f(\Delta)$ serait infini].

Soit D l'ensemble dénombrable des points de discontinuité. Nous pouvons écrire

$$f(e) = f(e\mathrm{D}) + [f(e) - f(e\mathrm{D})].$$

Nous avons ainsi décomposé $f(e)$ dans une fonction continue $f(e) - f(e\mathrm{D})$ et une fonction $f(e\mathrm{D})$ qui est nulle hors d'un

ensemble dénombrable. Nous dirons que $f(e\mathrm{D})$ est la *fonction des sauts*, d'après une locution adoptée par M. Lebesgue [1].

Considérons maintenant une fonction quelconque f qui peut changer de signe. C'est la différence, $f_1 - f_2$, de deux fonctions non négatives, auxquelles s'applique la décomposition précédente. Soient D_1 et D_2 les ensembles dénombrables de points de discontinuité de f_1 et de f_2 et D leur somme. La fonction considérée f est la somme d'une fonction continue et d'une *fonction des sauts* $f(e\mathrm{D})$. Celle-ci est la somme de deux fonctions de sauts de signes contraires :

$$f(e\mathrm{D}) = f(e\mathrm{D}_1) + f(e\mathrm{D}_2).$$

Si on laisse de côté la fonction des sauts, dont il n'y a rien de plus à dire, l'étude d'une fonction additive se ramène à celle d'une fonction continue et additive. Nous allons faire d'abord cette étude pour les fonctions d'ensemble linéaire.

2. — Dérivation des fonctions continues et additives d'ensemble linéaire normal [2].

83. Nombres dérivés. — La théorie de la dérivation (sur un réseau) des fonctions d'ensemble spatial, qui sera exposée plus loin, s'applique, en particulier, aux fonctions d'ensemble linéaire. Mais ces fonctions-ci jouissent de propriétés qui leur sont propres et qui ne se généralisent pas, et l'on peut en faire une théorie à part plus précise et plus satisfaisante que l'autre. Cette théorie se fonde sur la considération des nombres dérivés à droite et à gauche dont nous avons déjà donné la définition (n° 50).

Soit $f(e)$ une fonction continue additive d'ensemble normal linéaire. Si nous désignons par ω l'intervalle (a, x) variable avec x, les nombres dérivés de f au point x sont ceux de la fonction continue de x

$$\varphi(x) = f(\omega).$$

Nous avons déjà étudié ceux-ci (n° 73). Les *nombres dérivés*

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, [illegible].

(2) Ces résultats ont été indiqués dans notre Mémoire des *Transactions of the American mathematical Society*. Nous simplifions ici les démonstrations et généralisons les résultats.

supérieur et *inférieur à droite* se désignent par Λ et λ, les *nombres dérivés supérieur* et *inférieur à gauche* par Λ' et λ' et nous savons (n° 73) que ces nombres sont des fonctions de x *mesurables* (B). S'ils sont égaux au point x, nous dirons que $f(e)$ a *une dérivée* (unique) en ce point.

84. **Lemme.** — *Si l'un des nombres dérivés de la fonction continue* $f(e)$, *par exemple* Λ, *est positif en chaque point d'un intervalle* Ω, *on a*

$$f(\Omega) > 0.$$

Si Λ *était négatif*, $f(\Omega)$ *le serait aussi* ([1]).

Je vais d'abord prouver que si Λ est > 0 partout, $f(\Omega)$ n'est pas négatif.

Soient a et b les extrémités de Ω, et x un point intermédiaire variable. Désignons par ω l'intervalle (a, x). Si $f(\Omega)$ était < 0, $f(\omega)$, qui tend vers $f(\Omega)$ quand x tend vers b (à cause de la continuité), serait aussi négatif pour x voisin de b. Soit donc $\xi < b$ la borne supérieure des valeurs de $x \geq a$ pour lesquelles $f(\omega)$ n'est pas négatif. Pour $x = \xi$, on aura $f(\omega) = 0$ (à cause de la continuité). Je dis que, contrairement à l'hypothèse, Λ ne sera pas positif au point ξ. En effet, soit ω' un intervalle infiniment petit ayant pour origine gauche le point ξ; on a, par définition de ξ,

$$f(\omega + \omega') = f(\omega') < 0;$$

donc Λ serait ≤ 0 au point ξ.

Ce raisonnement s'applique à tout intervalle α contenu dans Ω, donc $f(\alpha)$ est ≥ 0. Si $f(\Omega)$ était nul, la fonction devrait s'annuler sur tout intervalle partiel (à cause de la propriété additive) et Λ serait nul partout. Donc $f(\Omega)$ est positif.

85. **Théorème I.** — *Si l'un des nombres dérivés de* $f(e)$, *par exemple* Λ, *est positif en tout point d'un ensemble normal* E, *on a*

$$f(E) \geq 0.$$

([1]) Il est important d'observer que ce lemme suppose la continuité de f, tandis que le théorème analogue pour la dérivée sur un réseau (n° 56) ne la suppose pas.

La relation changerait évidemment de sens si Λ était négatif.

On peut supposer E fermé, car, E étant normal, $f(E)$ est limite de la valeur de f sur un ensemble fermé convenable, F, contenu dans E (n° 79), et il suffit de prouver le théorème pour F.

Dans cette hypothèse, désignons par Φ la variation totale de f et formons la fonction

$$\psi(e) = f(e) + \Phi(e.CE) + m(e.CE).$$

Je dis que ψ a son nombre dérivé (d'espèce Λ) partout positif, dans E comme dans CE : d'abord dans E, car, Φ étant $\geq$ o, ce nombre est au moins égal à celui de f; ensuite dans CE, car tout point P de CE (ouvert) est un point intérieur, au voisinage duquel ψ se réduit à la fonction

$$f(e) + \Phi(e) + me,$$

dont la dérivée est au moins égale à 1, car $f + \Phi$ est non négatif et la dérivée de me est 1.

Donc $\psi(\omega)$ est $>$ o sur tout intervalle ω, en vertu du lemme précédent ; donc aussi sur tout ensemble ouvert O, car c'est une somme d'intervalles ; donc $\psi(E)$ est $\geq$ o, car c'est la limite de ψ sur un ensemble variable O convenable (n° 79). Nous obtenons ainsi

$$\psi(E) - f(E) \geq o.$$

86. **Théorème II.** — *Les nombres dérivés de $f(e)$ sont sommables sur tout ensemble, e, normal et mesurable.*

Il suffit de considérer une fonction non négative, car f est la différence de deux fonctions *continues* non négatives, ce qui se prouve exactement comme au n° 48.

Soit Λ (non négatif) l'un des nombres dérivés de f supposée non négative. Désignons par Λ_n une fonction égale à Λ ou à n selon que Λ est inférieur ou non à n ; formons la minorante de $\int \Lambda_n dx$, et considérons la différence

$$f(e) - \min \int_e \Lambda_n dx.$$

Son nombre dérivé (d'espèce Λ) est partout positif, donc cette fonction est positive (n° 85). Faisons tendre la minorante vers sa

limite; il vient

$$f(e) \geqq \int_e \Lambda_n \, dx.$$

Donc, cette intégrale est bornée quel que soit n, et Λ est sommable sur e.

87. **Théorème III.** — *Si l'un des nombres dérivés de $f(e)$, par exemple Λ, est fini sur e normal et mesurable, on a*

$$f(e) = \int_e \Lambda \, dx.$$

Formons les majorante et minorante de cette intégrale et considérons les deux différences :

$$f(e) - \text{maj} \int_e \Lambda \, dx, \qquad f(e) - \min \int_e \Lambda \, dx;$$

leurs nombres dérivés (d'espèce Λ), donc les fonctions elles-mêmes (n° 85), sont nuls ou de signes contraires. Il s'ensuit que $f(e)$ est intermédiaire entre les minorante et majorante, égale donc à leur commune limite, l'intégrale.

88. **Théorème IV.** — *Soient* E_1 *l'ensemble des points où* $f(e)$ *a une dérivée (unique) infinie positive,* E_2 *celui où la dérivée est infinie négative,* E *leur somme. On a, quel que soit le nombre dérivé considéré* Λ *de* f, *sur tout e normal et mesurable,*

$$f(e) = f(eE_1) + f(eE_2) + \int_e \Lambda \, dx. \tag{1}$$

On peut aussi écrire

$$f(e) = f(eE) + \int_e \Lambda \, dx. \tag{2}$$

Soit H l'ensemble des points où Λ est fini. On a, par le théorème précédent, en observant que CH est de mesure nulle parce que Λ est sommable (n° 86),

$$f(eH) = \int_{eH} \Lambda \, dx = \int_e \Lambda \, dx;$$

par conséquent,

$$f(e) = f(eH) + f(e.CH) = f(e.CH) + \int_e \Lambda \, dx.$$

Il faut donc prouver que $f(e.\mathrm{CH})$ se réduit à

$$f(e\mathrm{E}) = f(e\mathrm{E}_1) + f(e\mathrm{E}_2),$$

ou, ce qui est la même chose, qu'on a

$$f[e(\mathrm{CH}-\mathrm{E})] = 0.$$

A cet effet, on remarque qu'en tout point de CH — E il y a : soit au moins un nombre dérivé fini, soit deux nombres dérivés infinis de signes contraires. L'ensemble $e(\mathrm{CH}-\mathrm{E})$ se décompose donc en un nombre limité d'autres ensembles (de mesure nulle) satisfaisant à l'une des deux conditions suivantes : 1° un même nombre dérivé au moins est fini, auquel cas f s'annule par le théorème III ; 2° un nombre dérivé est partout positif et un autre partout négatif, auquel cas f s'annule par le théorème I. On en conclut que f s'annule sur la somme, $e(\mathrm{CH}-\mathrm{E})$, de tous ces ensembles.

89. **Ensemble des singularités.** — L'ensemble E des points où $f(e)$ a une dérivée unique infinie est l'*ensemble des singularités*. La fonction, continue et additive,

$$f(e\mathrm{E}) = f(e\mathrm{E}_1) + f(e\mathrm{E}_2)$$

est la *fonction des singularités* [1]. Elle prend toutes ses valeurs sur l'ensemble E de mesure nulle et s'annule ailleurs. Nous dirons que c'est une *fonction singulière*. Les fonctions $f(e\mathrm{E}_1)$ et $f(e\mathrm{E}_2)$, l'une non négative et l'autre non positive (par le théorème I), sont ses variations positive et négative.

La fonction des singularités a une dérivée nulle presque partout, et $f(e)$ a presque partout pour dérivée Λ.

En effet, on tire de la formule (2) du n° 88

$$f(e\mathrm{E}) = f(e) - \int_e \Lambda\, dx.$$

Par conséquent, en tout point où cette dernière intégrale a pour dérivée Λ (donc presque partout), le nombre dérivé (d'espèce A) de $f(e\mathrm{E})$ est nul. Cette conclusion s'applique aux quatre nom-

(1) Ces termes sont dus à M. Lebesgue (*Ann. Éc. Norm.*, 1909).

bres dérivés de $f(eE)$, donc ils s'annulent simultanément presque partout et la dérivée de $f(eE)$ est alors nulle. Enfin la formule (2) montre qu'en tous ces mêmes points $f(e)$ a pour dérivée Λ.

90. **Théorème.** — *La fonction f ne peut se décomposer que d'une seule manière en la somme d'une intégrale et d'une fonction singulière.*

En effet, supposons que deux ensembles singuliers (donc de mesure nulle), E et E′, satisfassent, quel que soit e, à une relation de la forme

$$f(eE) + \int_e \Lambda\, dx = f(eE') + \int_e \Lambda_1\, dx.$$

On peut y remplacer e par $eE + eE'$, et elle se réduit à

$$f(eE) = f(eE').$$

Donc les intégrales aussi sont les mêmes.

91. **Dérivées quelconques.** — Appliquons le théorème précédent aux fonctions $f(e) - f(eE_1)$ et $f(e) - f(eE_2)$, dont la décomposition se tire de la formule (1) du n° 88. Nous voyons qu'elles ont respectivement comme fonctions des singularités $f(eE_2)$ et $f(eE_1)$. Donc les dérivées de $f(eE_1)$ et de $f(eE_2)$ sont nulles (et nulles simultanément) presque partout. Dans ce cas, leurs dérivées symétriques (n° 49) sont nulles aussi et alors, comme on le sait (n° 51), les dérivées sont encore nulles quand on les définit par n'importe quelle famille régulière d'ensembles. Cette conclusion s'étend à la somme $f(eE)$ des deux fonctions, d'où le théorème suivant :

La fonction singulière a pour dérivée o, *et la fonction* $f(e)$ *pour dérivée* Λ *presque partout, la définition de la dérivée restant arbitraire.*

92. **Variation totale.** — La formule (1) du n° 88 met en évidence que $f(e)$ est $\geqq 0$ sur les ensembles où Λ est $\geqq 0$ et inversement. Donc la *variation totale* Φ de f a pour expression

$$\Phi(e) = f(eE_1) - f(eE_2) + \int_e |\Lambda|\, dx.$$

Elle a pour dérivée $|\Lambda|$ presque partout.

3. — Fonctions additives d'ensemble spatial normal. Dérivation sur un réseau [1].

93. Préliminaire. — La notion des nombres dérivés à droite et à gauche ne s'étend pas à l'espace. Pour généraliser les résultats qui précèdent, il faut considérer les dérivées sur un réseau. La théorie que nous allons exposer pour le cas général s'applique, en particulier, aux ensembles linéaires. Elle est un peu moins précise que la précédente, mais, par contre, elle ne suppose pas la continuité de la fonction.

Soit $f(e)$ une fonction additive d'ensemble normal dans un espace quelconque; cette fonction est continue ou non. Nous allons considérer ses dérivées sur un *réseau* R (n° 54). Nous rappellerons que le réseau se compose de grillages superposés G_1, G_2, ..., G_n, ... et un grillage G_n, de mailles ω_n. Deux mailles contiguës sont sans point commun, et deux mailles qui ont un point commun sont emboîtées. En chaque point P, la fonction $f(e)$ a une dérivée supérieure et une dérivée inférieure et ce sont des fonctions mesurables (B) du point P. Nous représenterons ici l'une ou l'autre dérivée par DF.

94. Théorème I. — *Si* Df *est* ≥ 0 *en tout point d'un ensemble normal* E, *on a*

$$f(E) \geq 0.$$

L'inégalité se renverserait si Df *était négatif.*

Nous pouvons assigner un ensemble ouvert O > E, tel que $f(E)$ soit toujours aussi voisin qu'on veut de $f(E)$ sous la condition O > E' > E (n° 79). Mais nous pouvons satisfaire à cette condition par un ensemble E', somme de mailles du réseau sur lesquelles f est positif (n° 56), auquel cas $f(E')$ sera aussi positif. Il vient donc, à la limite, $f(E) \geq 0$.

---

[1] Ces résultats ont été établis dans notre Mémoire des *Transactions of the american mathematical Society*, 1915. Nous les précisons ici sur plusieurs points.

Il suffit d'énoncer les théorèmes suivants qui se déduisent de celui-ci comme dans le cas linéaire.

95. **Théorèmes II, III et IV.** — *Une dérivée* Df *est sommable* (n° 86) *et, si elle est finie, on a* (n° 87), *sur tout ensemble e normal et mesurable*,

$$f(e) = \int_e (\mathrm{D}f)\, d\mathrm{P}.$$

Dans le cas général, on a (n° 89)

$$f(e) = f(e\mathrm{E}_1) + f(e\mathrm{E}_2) + \int_e (\mathrm{D}f)\, d\mathrm{P},$$

où E_1 *est l'ensemble des points où f a une dérivée unique infinie positive*, E_2 *celui où la dérivée est infinie négative.*

L'ensemble E, somme de E_1 et de E_2, est l'*ensemble des singularités* et la fonction

$$f(e\mathrm{E}) = f(e\mathrm{E}_1) + f(e\mathrm{E}_2)$$

est la *fonction des singularités*. Les fonctions $f(e\mathrm{E})$, $f(e\mathrm{E}_1)$ et $f(e\mathrm{E}_2)$ ont chacune leur dérivée (sur le réseau) nulle presque partout, de sorte que $f(e)$ a presque partout pour dérivée A.

96. **Réseaux simultanés.** — Considérons maintenant un nombre limité de réseaux différents R_1, R_2, ..., R_k. On peut calculer les dérivées de $f(e)$ sur chacun d'eux. Un raisonnement, semblable à celui que nous avons fait au n° 88, prouve que $f(e\mathrm{E}_1)$ et $f(e\mathrm{E}_2)$ ne changent pas si l'on supprime les points de E_1 où la dérivée n'est pas infinie positive sur tous les réseaux ensemble, ou ceux de E_2 où elle n'est pas infinie négative de même. Donc *l'ensemble des singularités se réduit à celui des points où il y a une dérivée unique infinie sur tous les réseaux ensemble.*

Cette conclusion s'étend, par un passage à la limite, au cas où l'on considère une infinité dénombrable de réseaux. Il est inutile d'y insister.

Considérons un *système de réseaux conjugués*. Les fonctions, non négatives, $f(e\mathrm{E}_1)$ et $-f(e\mathrm{E}_2)$ ont leur dérivée nulle presque partout sur tous les réseaux à la fois. Donc leur dérivée reste nulle quelle qu'en soit la définition. De là la conclusion suivante :

La dérivée de la fonction des singularités est 0 *et celle de* $f(e)$ *est* Df *presque partout, la définition de la dérivée restant arbitraire.*

Le rôle du réseau est donc de mettre en évidence les points qui appartiennent à l'ensemble des singularités. Un exemple simple va montrer que, à ce point de vue, il est interdit de substituer une autre dérivée prise au hasard à celle sur un réseau.

Traçons une droite δ dans un plan et définissons une fonction, $f(e)$, additive d'ensemble superficiel en posant

$$f(e) = m(e\delta),$$

de sorte que $f(e)$ est la mesure *linéaire* de l'ensemble commun à e et δ. Cette fonction se confond avec sa fonction des singularités $f(e\delta)$, et l'ensemble des singularités est δ. On peut définir en chaque point des familles régulières d'ensembles excluant δ. Alors la dérivée de f calculée sur ces familles est nulle partout et elle ne décèle plus rien de l'ensemble des singularités.

Remarquons enfin que, sur l'ensemble des singularités tel qu'il a été défini dans le cas linéaire, la dérivée demeure infinie sur un réseau quelconque, car une dérivée sur un réseau est toujours moyenne entre les quatre nombres dérivés. Cette conclusion ne s'étend pas à l'espace, comme on le verrait facilement par le même exemple que ci-dessus; et le raisonnement sur les réseaux simultanés ne s'applique pas à tous les réseaux, parce que l'ensemble des réseaux n'est pas dénombrable. C'est en cela que la théorie des fonctions d'ensemble linéaire est plus précise que la théorie générale des fonctions d'ensemble spatial.

4. — Fonction continue à variation bornée de x.

97. Position du problème. — Soit $f(x)$ une fonction continue et univoque dans un intervalle (a, b). Soit (α, β) ou ω un intervalle variable dans (a, b). Comme nous l'avons déjà vu (n° 71), $f(x)$ définit une fonction d'intervalle $p(\omega)$ en posant

$$p(\omega) = f(\beta) - f(\alpha).$$

Cette fonction d'intervalle est *continue* (infiniment petite

avec $m\omega$) et, comme nous le savons, *additive* pour un nombre fini d'intervalles. Cela suffit pour définir sans ambiguïté la valeur de p sur tout ensemble $\mathcal{E}$ somme d'un nombre fini d'intervalles (n° 71).

Si la fonction $p(\mathcal{E})$ est *bornée* pour la totalité des ensembles $\mathcal{E}$, sommes d'un nombre fini d'intervalles, contenus dans (a, b), on dit que la fonction initiale $f(x)$ est *à variation bornée.*

Voici maintenant la question :

Étant donnée une fonction $f(x)$, continue et à variation bornée, ou, ce qui est la même chose, une fonction $p(\mathcal{E})$ d'intervalle, continue, additive et bornée, existe-t-il une fonction continue et additive d'ensemble normal qui coïncide avec $p(\mathcal{E})$ sur les intervalles?

La réponse est affirmative et nous allons montrer que ce problème admet une solution et une seule.

Le problème de la mesure des ensembles, résolu dans la première Partie de ces Leçons, est un simple cas particulier de celui-ci : Prenons $f(x) = x$, donc

$$p(\omega) = \beta - \alpha = m\omega;$$

cette fonction p n'est autre chose que la mesure et nous avons prouvé que, dans ce cas, le problème admet une solution et une seule pour la famille des ensembles mesurables.

Le procédé de démonstration qui nous a conduits à la solution dans le cas de la mesure, s'applique aussi bien au problème général, mais à condition de ramener le problème au cas d'une fonction p non négative. C'est par là qu'il faut commencer.

98. **Théorème.** — *Une fonction continue, bornée et additive d'intervalle est la différence de deux fonctions de même nature, non négatives.*

Soit $\varphi(\omega)$ la borne supérieure de $p(\mathcal{E})$ pour tous les ensembles $\mathcal{E}$, sommes d'un nombre fini d'intervalles, contenus dans ω. C'est une fonction bornée et non négative; je dis qu'elle est additive et continue :

1° *La fonction φ est additive pour deux intervalles non*

empiétants, par exemple ω *et* ω'. En effet, dans la relation

$$f(\omega\mathcal{E} + \omega'\mathcal{E}) = f(\omega\mathcal{E}) + f(\omega'\mathcal{E}),$$

on dispose à volonté de $\mathcal{E}$ de manière à faire tendre soit le premier, soit le second membre, vers sa borne supérieure, ce qui entraîne l'égalité de ces deux bornes :

$$\varphi(\omega + \omega') = \varphi(\omega) + \varphi(\omega').$$

2° *La fonction d'intervalle* φ *est continue*, c'est-à-dire que φ(ω) est infiniment petit avec *m*ω. En effet, désignons par Ω l'intervalle (*a*, *b*) entier. Nous pouvons, ε étant donné, par définition de φ, choisir $\mathcal{E}$ de manière à vérifier la condition

$$\varphi(\Omega) - f(\Omega\mathcal{E}) < \varepsilon.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - f(\omega\mathcal{E}).$$

Cette fonction ψ est une fonction additive et non négative de l'intervalle ω dans (*a*, *b*). Elle atteint son maximum quand ω = Ω. Il vient, par conséquent, quel que soit ω dans (*a*, *b*),

$$0 \leq \varphi(\omega) - f(\omega\mathcal{E}) < \varepsilon.$$

Donc, ε étant arbitraire et $f(\omega\mathcal{E})$ infiniment petit avec ω, φ(ω) est aussi infiniment petit avec ω : c'est la proposition 2°.

La démonstration du théorème est maintenant immédiate. La fonction *p*(ω) se décompose en une différence de deux fonctions continues et additives, non négatives, par la formule

$$p(\omega) = \varphi(\omega) - [\varphi(\omega) - p(\omega)].$$

99. **Poids d'un ensemble.** — Le problème posé au n° 97 est ramené maintenant au cas d'une fonction *p*(ω) non négative. Convenons de dire que *p*(ω) ou *p*ω est le *poids* de l'intervalle ω. Le poids est donc, par définition, une fonction *non négative*, continue, bornée et additive d'intervalle. Le problème à résoudre peut maintenant se poser dans les termes suivants :

Peut-on définir une fonction additive d'ensemble normal qui soit égale au poids sur un intervalle? La valeur de cette

fonction sera alors, par définition, le poids de l'ensemble normal.

Sauf la substitution du mot *poids* au mot *mesure*, c'est le problème résolu dans la première Partie de ces Leçons. Le problème actuel se résout de la même manière; il suffit de reprendre les raisonnements de la première Partie, en remplaçant le mot *mesure* par le mot *poids*, la lettre m par p et le mot *mesurable* par le mot *normal*. Il suffira évidemment de reprendre les énoncés des théorèmes successifs du Chapitre II sans refaire les démonstrations.

100. **Poids d'un ensemble somme d'intervalles.** — *Le poids d'un ensemble, somme d'une infinité dénombrable d'intervalles non empiétants, est la somme des poids des intervalles composants.* On justifie cette définition comme au n° 18, en généralisant d'abord le lemme du n° 17 comme on vient de l'expliquer.

101. **Poids des ensembles ouverts et fermés.** — Le poids d'un ensemble ouvert est défini au numéro précédent. *Le poids d'un ensemble fermé est le complément du poids du complémentaire* (n° 19), *c'est-à-dire que* $p(\mathrm{F}) = p(\mathrm{F}+\mathrm{CF}) - p(\mathrm{CF})$.

On a, pour des ensembles ouverts, comme au n° 19, 1° et 2°,

$$p(\mathrm{O}_1+\mathrm{O}_2+\ldots) \leqq p\mathrm{O}_1 + p\mathrm{O}_2+\ldots,$$
$$p\mathrm{O}_1 + p\mathrm{O}_2 = p(\mathrm{O}_1+\mathrm{O}_2) - p(\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2);$$

et, pour des ensembles fermés, comme au n° 19, 3°,

$$p\mathrm{F}_1 + p\mathrm{F}_2 = p(\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2) + p(\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2).$$

Le poids est additif pour un nombre limité d'ensembles fermés sans point commun deux à deux (n° 19, 4°).

Si O ouvert contient F fermé, on a (n° 19, 5°)

$$p(\mathrm{O}-\mathrm{F}) = p\mathrm{O} - p\mathrm{F}, \qquad p\mathrm{O} \geqq p\mathrm{F}.$$

Tout ensemble ouvert O contient un ensemble fermé F de poids infiniment voisin du sien (n° 19, 6°).

Le poids de F *fermé est la borne inférieure du poids des* O *ouverts qui le contiennent* (n° 19, 7°).

102. Ensembles normaux. — C'est l'extension de la définition des ensembles mesurables (n° 21). Il faut d'abord généraliser les notions de mesures extérieure et intérieure d'un ensemble E.

Le *poids extérieur*, p_eE, est la borne inférieure des poids des ensembles ouverts contenant E.

Le *poids intérieur*, p_iE, est la borne supérieure des poids des ensembles fermés contenus dans E.

On a, quel que soit l'ensemble E,

$$p_e E \geq p_i E,$$

$$p_e(E_1 + E_2 + \dots) \leq p_e E_1 + p_e E_2 + \dots.$$

Un ensemble est *normal* si ses poids intérieur et extérieur sont égaux. Leur valeur commune pE est le *poids de l'ensemble* E.

La condition nécessaire et suffisante pour que E *soit normal est que, quel que soit* ε *positif, on puisse déterminer deux ensembles, ouvert et fermé,* O *et* F, *tels qu'on ait* (n° 21)

$$O \supset E \supset F, \qquad pO - pF < \varepsilon.$$

Si E est normal, CE l'est aussi.

En particulier, les ensembles O et F sont normaux.

La condition pour que E *soit normal est aussi que* E *puisse se décomposer dans la somme*

$$E = F + e$$

d'un ensemble fermé et d'un ensemble e *de poids extérieur* $< \varepsilon$ (n° 22).

Les sommes, produits et différences d'ensembles normaux sont normaux (n° 23). Donc *les ensembles normaux constituent une famille close et le poids est une fonction additive pour les ensembles normaux.*

La question est donc résolue et nous savons, d'autre part, qu'elle ne peut admettre qu'une seule solution (n° 81).

103. Application à $f(x)$. — Soit $f(x)$ une fonction continue et à variation bornée. Elle définit une fonction d'ensemble normal, $p(e)$, continue et additive, qui admet les mêmes nombres dérivés qu'elle, à cause de la définition de $p(\omega)$ sur les intervalles.

Soit E l'ensemble des singularités de p ; on a, dans un inter-

valle (α, β) ou ω,

$$p(\omega) = p(\omega E) + \int_{\omega} \Lambda \, dx.$$

Ce résultat peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$f(\beta) - f(\alpha) = p(\omega E) + \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda \, dx.$$

Si ω ne contient aucun point de E, donc si f a une dérivée finie quand elle est unique dans ω, on a

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda \, dx.$$

Cette conclusion subsiste plus généralement si l'ensemble ωE ne contient aucun ensemble parfait. En effet, tout ensemble fermé $F < \omega E$ est alors dénombrable, auquel cas $p(F)$ est nul, car c'est la somme des valeurs (nulles) de p en chaque point de F. Comme on peut faire tendre $p(F)$ vers $p(\omega E)$, celui-ci est nul aussi.

104. Fonctions continues à variation bornée de deux variables. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans un rectangle Δ. Désignons par ω le rectangle variable (dans Δ) qui a son sommet de plus petites coordonnées au point (x, y) et dont les côtés (parallèles aux axes) ont pour longueurs h et k. Nous savons (n° 75) que l'on définit une fonction de rectangle, qui est additive et varie d'une manière continue avec x, y, h, k, en posant

$$p(\omega) = \Delta^2 f = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y).$$

Cette fonction est définie sur tout ensemble $\mathcal{E}$, somme d'un nombre fini de rectangles ω non empiétants, comme étant la somme des valeurs $p(\omega)$ sur chaque partie.

Si $p(\mathcal{E})$ est bornée sur tous les $\mathcal{E}$ contenus dans Δ, on dit que $f(x, y)$ est *à variation bornée* dans Δ.

Dans ce cas, on montre (comme dans le cas linéaire) qu'il existe une fonction continue et additive d'ensemble normal, $p(e)$, qui coïncide avec $p(\omega)$ sur les rectangles, et que cette fonction est unique.

Tous les théorèmes établis sur les fonctions continues et additives d'ensemble normal, et ceux-ci comprennent toujours tous les ensembles mesurables (B), se traduisent donc en propriétés correspondantes de la fonction $f(x, y)$. Nous ne nous arrêterons pas à énumérer ces propriétés, dont nous avons donné une idée suffisante au n° 76.

Tout cela s'étend aux fonctions d'un nombre quelconque de variables et nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

Toute fonction de point, $f(P)$, qui est continue et à variation bornée, définit une fonction $p(e)$, continue et additive, d'ensemble normal.

La mesure des ensembles, en particulier, est la fonction d'ensemble normal définie par la fonction de point, $f = xy\ldots$.

On peut étendre la théorie précédente aux fonctions de point qui sont à variation bornée sans être continues. Il y a toutefois quelques restrictions à introduire et nous laisserons cette question de côté. On peut aussi fonder, sur les propriétés des fonctions d'ensemble, une théorie très satisfaisante du changement des variables dans les intégrales doubles. Nous avons traité cette question dans notre Mémoire des *Transactions of the American mathematical Society* (1915) et nous y renverrons le lecteur.

TROISIÈME PARTIE.

CLASSES DE BAIRE.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS DE CLASSE 1. THÉORÈME ET PROBLÈME DE BAIRE.

1. — Ensembles ouverts, fermés, compacts sur un ensemble parfait.

105. **Définitions.** — Nous avons défini précédemment (n° 11) les points intérieurs, extérieurs et frontières d'un ensemble E relativement à un domaine Δ. Il est utile de généraliser ces définitions et de les étendre au cas où l'on remplace le domaine Δ par un ensemble parfait et borné quelconque P.

Considérons donc un ensemble parfait et borné P dans un espace quelconque et soit E un ensemble $< P$.

L'ensemble $P - E$ s'appelle le *complémentaire* de E par rapport à P (ou sur P) et se désigne par CE.

Un point M de P est *intérieur* à E (sur P) s'il est à distance non nulle de CE. Il est *extérieur* à E (sur P) s'il est intérieur à CE. Il est *frontière* (sur P) de E et de CE, s'il n'est ni intérieur ni extérieur, donc s'il est à distance nulle de E et de CE.

Si E n'est pas $< P$, un point M de P est dit *intérieur* à E (sur P) quand il est intérieur à EP.

Un ensemble E (contenu dans P) est *fermé* (sur P) s'il contient ses points frontières (sur P). Il contient alors tous ses points limites et, par conséquent, il est aussi fermé au sens absolu.

Un ensemble E (contenu dans P) est *ouvert* (sur P) s'il ne contient aucun point frontière, ou s'il ne contient que des points intérieurs (sur P).

Un ensemble qui, tel P lui-même, n'admet pas de point frontière (sur P) est à la fois ouvert et fermé (sur P).

106. Propriétés des ensembles ouverts et des ensembles fermés sur P. — 1° *Si un ensemble* $E \subset P$ *est fermé (sur* P*), son complémentaire* CE *est ouvert, et réciproquement.*

2° *Une somme et un produit finis d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts; une somme et un produit finis d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.*

3° *Une somme infinie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

4° *Un produit infini d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Ces propositions se démontrent comme au n° 12.

5° *Tout ensemble ouvert* O *est une somme d'ensembles fermés et l'on sait effectuer la décomposition de* O *en une telle somme.*

En effet, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite positive, décroissante et tendant vers zéro. Soit F_n l'ensemble des points qui sont à une distance $\geq \varepsilon_n$ de CO qui est fermé. Les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ sont fermés et O est leur somme.

107. Ensemble compact sur P. — Nous dirons, par définition, qu'un ensemble E, contenu ou non dans P, est *compact* sur P, si l'ensemble EP contient un point intérieur (sur P). Cette définition, qui est nouvelle, nous sera très utile.

Voici le théorème fondamental relativement aux ensembles compacts ou non compacts :

Toute somme d'ensembles fermés (au sens absolu), non compacts sur P, *est un ensemble non compact sur* P.

Supposons que E soit la somme des ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ fermés et non compacts sur P. Soit alors M_0 un point de EP; il faut prouver qu'il n'est pas intérieur (sur P), donc que tout domaine Δ_0 de centre M_0 contient un point du complémentaire de EP.

D'abord Δ_0 contient un point M_1 du complémentaire de F_1P, puisque M_0 n'est pas intérieur à F_1P; et, comme ce complémentaire est ouvert, M_1 est un point intérieur, donc centre d'un

domaine $\Delta_1 < \Delta_0$ exclu de F_1P. De même, Δ_1 contient un point M_2 du complémentaire de F_2P, centre d'un domaine $\Delta_2 < \Delta_1$ exclu de F_2P, et ainsi de suite. Tous ces points $M_0, M_1, M_2, \ldots$ de P ont au moins un point limite M, qui appartient à P, puisque P est fermé. Ce point M de P est contenu dans tous les domaines emboîtés $\Delta_0 > \Delta_1 > \Delta_2 \ldots$ et, par conséquent, il est exclu de F_1P, F_2P, ..., donc exclu de leur somme EP, ce qui prouve la proposition.

Le théorème précédent peut aussi s'énoncer sous la forme suivante :

Une somme d'ensembles fermés F *ne peut être compacte sur* P *que si l'un des ensembles* F *est compact sur* P *et alors l'ensemble somme est évidemment compact aussi.*

2. — Le théorème auxiliaire.

108. Théorème et problème de Baire. — M. Baire a trouvé un théorème extrêmement remarquable qui fait connaître une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de classe 1. C'est ce théorème que nous appelons le *théorème de Baire*. Ce théorème est lié à un problème que nous appelons le *problème de Baire* et que voici : « Étant donnée une fonction f de classe 1, construire une fonction continue f_n qui tende vers f quand n tend vers l'infini. »

M. Baire a démontré son théorème par un raisonnement qui fournit un procédé de résolution du problème précédent. Il semble bien que la résolution du problème ne puisse se passer de l'intervention du transfini, et le transfini joue effectivement un rôle essentiel dans le raisonnement de M. Baire. Par contre, la démonstration du théorème n'implique pas nécessairement la considération du transfini et c'est ainsi que M. Lebesgue a donné diverses démonstrations du théorème sans avoir besoin de faire appel à cette notion. Nous en reparlerons plus loin (nº 123).

Nous allons donner ici une nouvelle démonstration du théorème de Baire et une solution, nouvelle et plus simple, dudit problème. Nous aurons pour cela à étudier d'abord un théorème et un problème auxiliaires sur les ensembles. Comme dans le cas

précédent, la démonstration du théorème n'invoque pas le transfini, tandis que celui-ci joue un rôle indispensable dans la solution du problème.

109. Théorème auxiliaire. — Le théorème et le problème auxiliaires se rattachent à la résolution de la question suivante :

Soit P un ensemble parfait et borné. On suppose que l'on a

$$(1) \qquad P = E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots,$$

où $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ sont des ensembles donnés, en nombre fini ou non, qui peuvent empiéter. On demande à quelle condition il sera possible de mettre P sous la forme

$$(2) \qquad P = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k + \ldots,$$

où les ensembles à déterminer $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sont assujettis aux conditions suivantes :

1° On doit avoir $\Phi_1 \leq E_1$, $\Phi_2 \leq E_2$, ... ;

2° Les ensembles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ doivent être sans point commun deux à deux ;

3° Ces ensembles doivent être des sommes d'ensembles fermés ou être nuls.

Le *théorème auxiliaire* donne la condition nécessaire et suffisante pour que la décomposition (2) soit possible.

Le *problème auxiliaire* consiste à effectuer la décomposition (2) lorsque cette condition est remplie.

Voici l'énoncé du théorème auxiliaire, que nous nous proposons maintenant de démontrer :

La condition nécessaire et suffisante pour que P *puisse se décomposer par la formule* (2) *est que, quel que soit l'ensemble parfait* Q *contenu dans* P, *l'un au moins des ensembles* E_1, E_2, ..., E_k, ... *soit compact sur* Q (n° 107).

Nous allons voir que ce théorème se démontre sans aucun appel au transfini. Pour la commodité du langage, il convient d'abord de donner deux définitions.

Nous dirons, pour abréger, qu'*un ensemble quelconque* H *est*

décomposable, s'il admet une décomposition satisfaisant aux conditions de la formule (2).

Nous dirons qu'un ensemble H est *décomposable au point* M, si M est le centre d'un domaine Δ de rayon suffisamment petit pour que l'ensemble $H\Delta$ soit décomposable.

Considérons des ensembles $< P$ et leurs complémentaires sur P. Nous pouvons alors énoncer les propriétés suivantes :

1° *Si l'ensemble* H *est décomposable et si* H_1 *est fermé ou somme d'ensembles fermés* (*donc, en particulier si* H_1 *est ouvert sur* P), *l'ensemble* HH_1 *est décomposable.*

En effet, soit

$$H = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots;$$

la décomposition de HH_1 se fera par la formule

$$HH_1 = \Phi_1 H_1 + \Phi_2 H_1 + \ldots,$$

car le produit de deux sommes d'ensembles fermés est la somme des produits partiels, qui sont fermés.

2° *Si* H *est une somme* (*finie ou infinie*) *d'ensembles* H_1, H_2, ..., H_i, ... *décomposables et sans point commun deux à deux*, H *est décomposable.*

En effet, on obtient la décomposition de H en ajoutant terme à terme celles de H_1, H_2, ...

3° *Si* H *est une somme d'ensembles fermés décomposables, mais pouvant cette fois empiéter*, H *est décomposable.*

Soient F_1, F_2, F_3, ... ces ensembles fermés décomposables. Leurs complémentaires sont ouverts sur P et les produits finis de ces complémentaires sont ouverts aussi; par conséquent, les produits $F_2 . CF_1$, $F_3 . CF_1 . CF_2$, ... sont décomposables, parce que ce sont les produits d'un ensemble décomposable par un ensemble ouvert sur P (1°). Comme, de plus, ces produits sont sans point commun deux à deux, leur somme H est décomposable (2°).

4° *Si un ensemble fermé* F *est décomposable en chacun de ses points*, F *est décomposable.*

C'est la conséquence du lemme de Borel (n° 15). Tout point de F est le centre d'un domaine Δ tel que $F\Delta$ soit décomposable.

On peut couvrir tout F avec un nombre limité de domaines Δ; donc F est la somme d'un nombre limité d'ensembles fermés et décomposables $F\Delta$, et F est décomposable (3°).

5° *Si un ensemble fermé* F *est indécomposable*, F *contient un ensemble parfait* Q *qui est indécomposable en chacun de ses points*.

Il y a, en vertu de 4°, des points de F où F est indécomposable; soit Q l'ensemble de ces points.

L'ensemble Q est *fermé*, car tout point où F est décomposable est à distance finie de Q par définition.

L'ensemble $F.CQ$ est décomposable. En effet, CQ est ouvert; c'est donc une somme ΣF_i d'ensembles fermés. Comme F est décomposable en chaque point de F_i, le produit FF_i est aussi décomposable en chacun de ses points (1°) et, par conséquent, décomposable (4°). Donc $F.CQ$, égal à ΣFF_i, est décomposable (3°).

Il suit de là que les points où F est indécomposable sont ceux où Q est indécomposable, car la décomposition de Q entraîne celle de F (2°) par la formule

$$F = Q + F.CQ.$$

Donc Q est indécomposable en chacun de ses points. Enfin, Q ne peut contenir de point isolé, car Q serait décomposable en ce point où la décomposition est toute faite. Donc Q, étant aussi fermé, est parfait.

6° *Si, quel que soit l'ensemble parfait* Q *contenu dans* P, *l'un des ensembles* $E_1, E_2, \ldots$ *de la formule* (1) *est compact sur* Q, P *est décomposable*.

En effet, si P n'était pas décomposable, il contiendrait un ensemble parfait Q indécomposable en chacun de ses points (5°). Or c'est impossible si un ensemble E_i est compact sur Q. En effet, $E_i Q$ possède alors un point M *intérieur* sur Q, centre d'un domaine Δ ne renfermant aucun point de $C(E_i Q)$. On a donc

$$Q\Delta < E_i.$$

Mais ceci exprime que la décomposition de $Q\Delta$ est toute faite.

car QΔ est fermé et l'on peut prendre Φ_k égal à QΔ. Donc Q serait décomposable au point M, ce qui est contraire à l'hypothèse.

7° *Réciproquement, si* P *est décomposable, je dis que, quel que soit l'ensemble parfait* Q < P, *l'un au moins des ensembles* E_k *sera compact sur* Q.

En effet, Q (égal à QP) est aussi décomposable (1°), donc en une somme d'ensembles fermés F extraits des ensembles E_k. Donc l'un au moins de ces ensembles F est compact sur Q, sinon leur somme ne le serait pas (n° 107). Alors l'ensemble E_k qui contient cet F est, *a fortiori*, compact sur Q.

Le théorème auxiliaire, énoncé au début, se trouve ainsi démontré. La proposition 6° prouve que la condition formulée est suffisante; la proposition 7°, qu'elle est nécessaire.

110. Corollaires. — 1° *Si les ensembles* E_1, E_2, ... *de la formule* (1) *sont eux-mêmes des sommes d'ensembles fermés, alors la décomposition de* P *par la formule* (2) *est toujours possible.*

En effet, soit Q un ensemble parfait < P; Q est contenu dans la somme de tous les ensembles fermés, F, qui composent les ensembles E_k. Cette somme est compacte sur Q, donc l'un au moins des F est compact aussi (n° 107). Alors l'ensemble E_k qui contient cet F est, *a fortiori*, compact sur Q. Donc la décomposition est possible, en vertu du théorème auxiliaire.

2° *Si les ensembles* E_1, E_2, ... *satisfaisant à la condition*

$$P = E_1 + E_2 + \ldots \tag{1}$$

sont sans point commun deux à deux, la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient sommes d'ensembles fermés est que, quel que soit Q *parfait* < P, *l'un d'eux soit compact sur* Q.

En effet, dans ce cas, les formules (1) et (2) sont identiques.

3. — Résolution du problème auxiliaire.

111. Principe fondamental sur le transfini. — Nous avons énoncé le problème auxiliaire au n° 109. Pour le résoudre, il faut faire intervenir un principe fondamental de Cantor sur le transfini dont nous allons d'abord nous occuper.

Nous commencerons par établir un lemme, que nous utiliserons dans la démonstration de ce principe.

Nous supposons connu le mode de formation des nombres transfinis successifs de première et de deuxième espèce :

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots$$

et nous désignerons, en général, par μ l'un quelconque d'entre eux. Voici maintenant le lemme en question :

Soit F *un ensemble fermé et borné. Considérons une suite, simplement infinie ou non, d'ensembles ouverts sur un domaine* Δ, *chacun contenu dans tous les suivants :*

$$O_1 < O_2 < O_3 \ldots < O_n \ldots < O_\alpha < O_{\alpha+1} \ldots.$$

Si tout point de F *appartient à l'un des ensembles de cette famille,* F *est contenu dans l'un d'eux,* O_μ.

C'est une conséquence du lemme de Borel, qui est immédiate sous la dernière forme donnée à ce lemme au n° 15. L'ensemble F peut être recouvert avec un nombre limité d'ensembles O_α. Donc il est couvert par celui qui a l'indice le plus élevé, lequel contient les précédents.

Passons maintenant au principe fondamental.

Considérons une suite finie ou transfinie d'ensembles fermés et bornés F, chacun contenant tous les suivants :

$$F_1 > F_2 > F_3 \ldots > F_n \ldots > F_\alpha > F_{\alpha+1} \ldots$$

Une telle suite est définie par le procédé qui permet de déduire chaque terme de ceux qui précèdent. Nous supposons que ce procédé s'applique transfiniment, c'est-à-dire permet de poursuivre la suite des indices jusqu'à tout nombre transfini donné μ. Nous admettons d'ailleurs que tous les ensembles F peuvent devenir

nuls à partir d'un certain indice. Alors, voici le principe fondamental de Cantor :

Dans les conditions précédentes, on peut assigner un indice μ, *à partir duquel on a soit* $F_\mu = 0$, *soit* $F_\mu = F_{\mu+1} \neq 0$.

Pour prouver ce théorème, donnons-nous un domaine Δ contenant F_1 et, par conséquent, tous les F_α suivants et considérons les complémentaires par rapport à Δ. Deux cas sont possibles :

1° Tout point de Δ est exclu de F_α pour un indice α correspondant, auquel cas il appartient à CF_α ouvert. Mais, comme la suite $CF_1 < CF_2, \ldots$ satisfait aux conditions du lemme précédent, Δ est contenu dans CF_μ, pour un certain indice μ, et lui est, par conséquent, identique. Dans ce premier cas, F_μ est nul.

2° Ou bien Δ contient des points communs à tous les F_α possibles; et ces points forment un ensemble fermé F, car un point limite de points appartenant à tout F_α, appartient à tout F_α. Je vais démontrer qu'il existe un indice μ pour lequel $F_\mu = F$.

Le complémentaire de F est ouvert et, par conséquent, c'est une somme d'ensembles fermés, $\Sigma\varphi_i$. Considérons l'un d'eux, φ_i. La suite des ensembles fermés $F_1\varphi_i > F_2\varphi_i > F_3\varphi_i \ldots$ est sans point commun, ce qui nous ramène au cas précédent. Il y a donc un premier indice ω_i (correspondant à φ_i) pour lequel on a

$$F_{\omega_i}\varphi_i = 0.$$

Considérons la suite des indices

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n, \quad \ldots$$

Supprimons-y tout terme qui ne surpasse pas tous les précédents; la suite obtenue est croissante et peut être finie ou infinie Si elle est finie, son dernier terme μ est le plus grand. Si elle est infinie, elle définit un premier nombre μ supérieur à toute la suite (n° 33). On a alors, quel que soit l'indice i, $F_\mu\varphi_i = 0$. Par conséquent

$$F_\mu \Sigma \varphi_i = F_\mu CF = F_\mu - F = 0.$$

Comme F est $< F_\mu$, il lui est identique.

Donc, à partir de $\alpha \geqq \mu$, on aura $F_\alpha = F_{\alpha+1} \neq 0$.

112. Solution du problème auxiliaire. — Revenons au problème auxiliaire. On considère un ensemble parfait P, contenu dans une somme d'ensembles donnés $E_1, E_2, \ldots$, c'est-à-dire satisfaisant à la relation

$$P \subset E_1 + E_2 + \ldots + E_k + \ldots$$

Il s'agit d'effectuer la décomposition de P en ensembles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ et de $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ en ensembles fermés, satisfaisant aux conditions de l'équation du n° 109 :

$$P = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k + \ldots$$

On suppose que la condition du théorème auxiliaire est satisfaite, donc que, quel que soit Q parfait contenu dans P, l'un au moins des ensembles E_k est compact sur Q. La solution du problème prouvera donc, à nouveau, que cette condition est suffisante pour que la décomposition soit possible.

Les décompositions demandées vont s'obtenir par un calcul de proche en proche, poussé transfiniment, comme il suit :

Soit, en général, O_k l'ensemble des points de $E_k P$ qui sont intérieurs sur P. C'est un ensemble ouvert sur P, ainsi que la somme O de tous les O_k qui n'est pas nulle par hypothèse. L'ensemble O se décompose par la formule

$$(1) \qquad O = O_1 + O_2 . CO_1 + O_3 . CO_1 . CO_2 + \ldots$$

où l'on prend les complémentaires par rapport à P, et dont les termes sont des sommes connues (n° 105, 5°) d'ensembles fermés, sans point commun deux à deux, respectivement contenues dans $E_1, E_2, E_3, \ldots$.

Il reste alors à décomposer $P - O$, qui est fermé, et, par conséquent (n° 6), somme de P_1 *parfait* et de D_1 dénombrable. Mais D_1, *somme de points*, est immédiatement décomposable, par la formule

$$(2) \qquad D_1 = D_1 E_1 + D_1 (E_2 - E_1) + D_1 (E_3 - E_1 - E_2) + \ldots$$

car les sommes de points sont des sommes d'ensembles fermés.

Si P_1 est nul, la décomposition est faite. Dans le cas contraire, il reste à décomposer P_1 qui est parfait.

On recommence la même opération qu'on vient de faire sur P.

On désigne par O'_k l'ensemble des points de $E_k P_1$ qui sont intérieurs sur P_1, l'ensemble O' somme des O'_k se décompose par la formule (1), où l'on ajoutera des accents. Il reste alors à décomposer $P_1 - O' = P_2 + D_2$, où P_2 est parfait et D_2 dénombrable. Mais D_2 est immédiatement décomposable par la formule (2), et il reste à décomposer P_2. Si P_2 est nul, la décomposition est faite.

En continuant ainsi de proche en proche, on détermine une suite illimitée d'ensembles parfaits $P_1 > P_2 > \ldots P_n, \ldots$. Si l'on arrive à un terme nul, la décomposition est faite.

Si la suite se prolonge indéfiniment, l'ensemble commun, qui est un produit d'ensembles fermés, est un ensemble fermé [1], donc somme de P_ω parfait et de D_ω dénombrable. Mais D_ω est décomposable, donc il reste à décomposer P_ω. Si P_ω est nul, le problème est résolu. Dans le cas contraire, il faut décomposer P_ω (dont l'indice est de deuxième espèce). On recommence la même opération et l'on continue ainsi de suite en parcourant l'échelle des nombres transfinis. Je dis que l'on arrivera nécessairement à un indice μ tel que P_μ sera nul, auquel cas la décomposition sera terminée. C'est la conséquence du principe fondamental.

En effet, d'après ce principe, on peut assigner un indice μ, tel qu'on ait : soit $P_\mu = 0$, soit $P_\mu = P_{\mu+1} \neq 0$. Or le second cas est impossible, car si P_μ n'est pas nul, l'un des E_k est compact sur P_μ par hypothèse, et $P_{\mu+1}$ diffère de P_μ au moins par la suppression des points de E_k qui sont intérieurs sur P_μ. Donc le problème est résolu.

4. — Condition nécessaire et suffisante de Lebesgue. Solution du problème de Baire.

113. Fonction de classe 1. — On peut exprimer de deux manières différentes la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit de la classe 1. L'une constitue le théorème de Baire, l'autre est la condition de Lebesgue dont nous nous occuperons pour commencer. M. Lebesgue a considéré la fonction f dans un domaine. Il est préférable de la considérer (avec M. Baire) sur un

---

(1) Cet ensemble ne peut être nul, car, si l'on prend un point dans chaque P_n de la suite, on forme un ensemble admettant au moins un point limite, lequel appartient à tous les P_n.

ensemble parfait borné P. Nous donnerons la définition suivante :

Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction discontinue de plusieurs variables, univoque sur un ensemble parfait et borné P : *cette fonction est de classe* 1 *sur* P, *si elle est, sur* P, *la limite d'une fonction f_n continue sur* P.

Une fonction est *continue sur* P en un point M de P si sa valeur en ce point est limite (finie) de sa valeur en un point de P infiniment voisin. Elle est continue sur P si elle est continue sur P en chaque point de P.

M. Lebesgue a énoncé le théorème suivant [1] :

La condition nécessaire et suffisante pour que f, supposée discontinue, soit de classe 1 *sur* P, *est que les ensembles de points de* P,

$$E(f > A), \qquad E(f < A)$$

soient des sommes d'ensembles fermés quel que soit A.

Il a montré aussi que, si l'on sait effectuer la décomposition en sommes d'ensembles fermés, on peut résoudre le problème de Baire, c'est-à-dire construire une fonction continue f_n qui tend vers f pour $n = \infty$.

Nous allons retrouver ces résultats, mais en procédant autrement que M. Lebesgue.

114. Théorème direct de Lebesgue. — *Si la fonction f est de classe* 1 *sur* P, *les ensembles de points de* P

$$E(f > A), \qquad E(f < A)$$

sont sommes d'ensembles fermés.

Il suffit de considérer $E(f > A)$.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ la suite des fonctions continues tendant vers f, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro. Désignons par E_n^k l'ensemble

$$E_n^k = E(f_n \geqq A + \varepsilon_k).$$

[1] Sur une propriété caractéristique des fonctions de classe 1 (*Bull. Soc. math.*, 1904).

Cet ensemble est *fermé* puisque f_n est continue. Un point où l'on a $f > A$ et, par conséquent, $f > A + \varepsilon_k$ à partir d'un indice k assez grand, appartient à tous les ensembles E_n^k, E_{n+1}^k, ... à partir d'une valeur suffisamment grande de n et il appartient alors au produit

$$F_n^k = E_n^k E_{n+1}^k \ldots$$

qui est fermé. Réciproquement, f est $> A$ en un point de F_n^k. Donc l'ensemble $E(f > A)$ est la somme de tous les ensembles fermés F_n^k où n et k prennent toutes les valeurs entières.

115. **Fonctions de classe 1 qui n'admettent qu'un nombre limité de valeurs différentes.** — Considérons une fonction f qui n'est susceptible que d'un nombre limité h de valeurs différentes $a_1 < a_2, \ldots, < a_h$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit de classe 1 est que chacun des ensembles

$$E_i = E(f = a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

soit une somme d'ensembles fermés. De plus, si cette décomposition est connue pour chaque E_i, on peut résoudre le problème de Baire pour f.

La condition indiquée est nécessaire en vertu du théorème direct précédent. En effet, E_i est le produit des deux ensembles sommes d'ensembles fermés

$$E(f > a_{i-1}), \qquad E(f < a_{i+1}).$$

Nous allons prouver que la condition est suffisante en résolvant le problème de Baire, donc en construisant une fonction continue f_n qui tend vers f.

A cet effet, désignons par H_i^n l'ensemble qu'on obtient en limitant à ses n premiers termes la somme d'ensembles fermés qui a pour limite E_i pour $n = \infty$. Ainsi l'ensemble H_i^n est fermé et a pour limite E_i quand n tend vers l'infini. De plus, il est contenu dans E_i. Deux ensembles H_i^n et H_k^n sont donc sans point commun et à distance non nulle l'un de l'autre.

Nous pouvons définir f_n de la manière suivante :

En un point M d'un des ensembles H''_i, nous posons

$$f_n = f = a_i.$$

En un point M exclu de $H''_1, H''_2, \ldots, H''_h$, donc à des distances non nulles, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_h$, de chacun de ces ensembles, nous posons

$$f_n = \frac{\dfrac{a_1}{\delta_1} + \dfrac{a_2}{\delta_2} + \ldots + \dfrac{a_h}{\delta_h}}{\dfrac{1}{\delta_1} + \dfrac{1}{\delta_2} + \ldots + \dfrac{1}{\delta_h}}.$$

Deux δ différents ne peuvent tendre simultanément vers zéro. Donc f_n est une fonction continue du point M qui tend vers a_i quand δ_i tend vers zéro.

Il est clair que f_n tend vers f quand n tend vers l'infini.

Si la décomposition des ensembles H_i en sommes d'ensembles fermés n'est pas connue, la solution du problème de Baire dépend de la solution du problème auxiliaire (qui fournira cette décomposition) et, par conséquent, elle exige en général l'intervention du transfini.

Nous avons, en effet, dans le cas actuel,

$$P = E_1 + E_2 + \ldots + E_h.$$

La solution du problème auxiliaire nous fournit la décomposition de P en $\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots$ où les Φ sont des *sommes connues d'ensembles fermés*. Ces ensembles Φ_i sont extraits respectivement des ensembles E_i et, dans le cas actuel, sont respectivement identiques à ceux-ci, puisque ceux-ci n'empiètent pas (n° **110**, 2°).

116. Théorème [1]. — *Soit f une fonction bornée; si les ensembles*

$$E(f > A), \quad E(f < A)$$

*sont des sommes d'ensembles fermés quel que soit A, donc toujours si f est de la classe 1 (n° **114**), on peut, quel que soit ε positif donné, déterminer une fonction de classe 1 qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes et qui est égale à f à moins de ε près.*

---

(1) Ce théorème est nouveau.

Partageons l'intervalle des deux bornes de f par une échelle de nombres croissants

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k, \quad a_{k+1},$$

dont les différences soient $< \varepsilon$. Désignons par E_i l'ensemble

$$E_i = E(a_{i-1} < f < a_{i+1}) = E(f > a_{i-1}) E(f < a_{i+1}).$$

Nous aurons

$$(1) \qquad P = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$$

et chaque ensemble E_i est somme d'ensembles fermés, car c'est le produit de deux sommes d'ensembles fermés par hypothèse. Donc, en vertu du corollaire (1°) du théorème auxiliaire (n° **110**), la décomposition prévue dans ce théorème est possible pour P ; et nous pouvons, des ensembles E_i, extraire des ensembles Φ_i *sans point commun deux à deux* et sommes d'ensembles fermés, tels que l'on ait encore

$$(2) \qquad P = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k.$$

Définissons maintenant une fonction φ égale à a_i dans Φ_i, cette fonction est égale à f à moins de ε près sur P et elle est de classe 1, en vertu du théorème précédent (n° **115**).

La possibilité de la formule (2) est démontrée sans l'emploi du transfini, mais la construction des ensembles $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, dépendant de la résolution du problème auxiliaire, réclame en général son intervention.

117. Théorème réciproque de Lebesgue. — *Toute fonction discontinue f, telle que les ensembles $E(f > A)$ et $E(f < A)$ soient des sommes d'ensembles fermés quel que soit A, est une fonction de classe 1.*

Nous allons établir cette proposition et montrer, en même temps, que, si les ensembles fermés sont connus, on sait résoudre le problème de Baire.

Remarquons d'abord qu'il suffit de faire la démonstration pour une fonction f bornée. En effet, si nous posons

$$\varphi = \frac{1}{1 - e^f},$$

la fonction φ est bornée et les ensembles $E(\varphi > A)$, $E(\varphi \le A)$ sont (en même temps que les précédents) sommes d'ensembles fermés. Il suffit alors de prouver le théorème pour φ, car si φ est limite de fonctions continues, f l'est aussi. Nous supposerons donc la fonction f bornée.

Soit ε_1 la borne supérieure du module de f. Considérons une série positive convergente, à termes décroissants, commençant par ε_1,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots.$$

Nous pouvons, pour chaque indice n, construire une fonction f_n de classe 1, ne prenant qu'un nombre limité de valeurs différentes et telle qu'on ait (n° 116)

$$|f - f_n| < \varepsilon_{n+1}.$$

Nous obtenons ainsi le développement de f en série absolument convergente

$$f = f_1 + (f_2 - f_1) + \ldots + (f_n - f_{n-1}) + \ldots.$$

Considérons la fonction

$$\varphi_n = f_n - f_{n-1};$$

sa valeur absolue est $< 2\varepsilon_n$, car on a

$$|f_n - f_{n-1}| \le |f_n - f| + |f - f_{n-1}| < \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n$$

et ceci reste vrai pour $n = 1$ en posant $f_0 = 0$.

D'autre part, la fonction φ_n est de classe 1 et ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes. Nous pouvons donc, par le procédé du n° 115, définir une fonction continue φ_{np}, qui tend vers φ_n quand p tend vers l'infini, et qui, par son mode de construction même, sera (avec φ_n) de module $< 2\varepsilon_n$. Formons alors la fonction continue (somme de p termes)

$$\psi_p = \varphi_{1p} + \varphi_{2p} + \ldots + \varphi_{pp};$$

les termes de cette somme sont inférieurs à ceux de même rang de la série positive convergente $2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots$. Cette somme converge donc, quand p tend vers l'infini, vers la série $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$, c'est-à-dire vers f. Donc f est de classe 1.

Cette démonstration établit le théorème sans intervention du transfini. Elle fournit, en outre, la solution du problème de Baire,

qu'elle ramène à des résolutions successives du problème auxiliaire. Mais celles-ci font généralement appel au transfini.

118. **Corollaire.** — *Si f est de classe 1 sur P parfait, la fonction F, égale à f sur P et à une constante a partout ailleurs, est de classe 1 sur le continu.*

Pour prouver que F est de classe 1, il faut prouver que les ensembles $E(F > A)$, $E(F < A)$ sont sommes d'ensembles fermés. Les ensembles $E(f > A)$, $E(f < A)$ contenus dans P sont tels par hypothèse. Les précédents le sont aussi, car ils sont les mêmes que ceux-ci, ou s'en déduisent par l'addition de l'ensemble ouvert CP, qui est somme d'ensembles fermés.

5. — Théorème de Baire.

119. **Théorème préliminaire.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que f soit de classe ≤ 1 sur P est que, quels que soient les deux nombres a et b $(a < b)$ et l'ensemble parfait $Q < P$, l'un au moins des deux ensembles de points de P :*

$$(1) \qquad E(f > a), \qquad E(f < b),$$

dont P est la somme, soit compact sur Q.

Cette condition est nécessaire. Si f est de classe 1, les deux ensembles (1) sont sommes d'ensembles fermés et P est la somme de tous ces ensembles F. Cette somme contient Q et est donc compacte sur Q, ce qui n'a lieu que si l'un des ensembles fermés F est compact sur Q (n° 107). Mais alors celui des ensembles (1) qui contient cet ensemble F est *a fortiori* compact sur Q.

Montrons maintenant que la condition est suffisante, et pour cela que, si elle est remplie, les deux ensembles (1) sont sommes d'ensembles fermés. Il suffira de prouver cette propriété pour le premier ensemble $E(f > a)$.

C'est la conséquence du théorème auxiliaire. Considérons une suite de nombres décroissants $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ayant pour limite a. Nous avons, quel que soit n,

$$P = E(f > a) + E(f < b_n).$$

Mais la condition du théorème actuel est précisément celle demandée dans le théorème auxiliaire. Elle assure la possibilité de faire la décomposition

$$P = \Phi_n + \Phi'_n$$

de P en deux ensembles, sommes d'ensembles fermés extraits respectivement de $E(f > a)$ et $E(f < b_n)$. Mais tout point de $E(f > a)$ est exclu de $E(f < b_n)$ (donc aussi de Φ_n) pour une valeur assez grande de n, et il appartient alors à Φ'_n. On a donc

$$E(f > a) = \sum_n \Phi'_n,$$

ce qui est une somme d'ensembles fermés.

120. Fonctions totalement, ponctuellement discontinues sur un ensemble parfait. — Soit P un ensemble parfait et soit f une fonction finie et univoque sur P. *L'oscillation* de f en un point M de P est la limite de l'oscillation de f sur P dans un domaine infiniment petit de centre M. C'est donc un nombre nul ou positif.

Si l'oscillation est nulle, la fonction f est *continue au point* M. Si l'oscillation est > 0, la fonction est *discontinue au point* M et le point M est un *point de discontinuité* (sur P).

On s'aperçoit immédiatement qu'un point de P, qui est limite de points où l'oscillation de f est $\geq \varepsilon$ positif, est un point qui jouit de la même propriété. Donc *l'ensemble des points où l'oscillation de f est $\geq \varepsilon$ est un ensemble fermé*.

Donnons-nous une suite positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ décroissante et tendant vers zéro. Soit E_k l'ensemble des points de discontinuité où l'oscillation de f est $\geq \varepsilon_k$. Cet ensemble est fermé. Soit E l'ensemble des points de discontinuité de f. Cet ensemble est la somme des précédents, donc

$$E = \sum_k E_k.$$

De là le théorème suivant :

L'ensemble des points de discontinuité de f sur P est une somme d'ensembles fermés [1].

---

[1] [illegible], *Bull. Soc. math.*, [illegible].

Nous donnons maintenant la définition suivante, qui est fondamentale :

Une fonction discontinue, mais finie, f, est totalement discontinue sur P *ou ponctuellement discontinue sur* P, *selon que l'ensemble* E *des points de discontinuité est compact sur* P, *ou ne l'est pas.*

Sauf la manière de la formuler, cette définition est due à M. Baire.

Si f est totalement discontinue sur P, *l'un des ensembles* E_k *est compact sur* P.

En effet, si aucun des ensembles fermés E_k n'était compact sur P, leur somme E ne le serait pas non plus (n° 107) et f ne serait pas totalement discontinue.

Réciproquement, si aucun E_k *n'est compact sur* P, *la fonction finie f est ponctuellement discontinue sur* P.

121. Théorème direct de Baire. — *Si une fonction finie n'est pas de classe* $\lesseqgtr 1$ *sur* P *parfait,* P *contient un ensemble parfait* Q *sur lequel f est totalement discontinue.*

Appliquons le théorème préliminaire (n° 119). Nous pouvons déterminer deux nombres a et $b > a$ et un ensemble parfait $Q < P$, tels qu'aucun des deux ensembles

$$E(f > a), \qquad E(f < b),$$

ne soit compact sur Q (sinon f serait de classe $\lesseqgtr 1$).

La fonction f est totalement discontinue sur Q, car elle est discontinue en chaque point M de Q. En effet, M, qui n'est intérieur (sur Q) à aucun des deux ensembles précédents, est à distance nulle des deux complémentaires (sur Q) où l'on a respectivement $f \leq a$ et $f \geq b$. Donc l'oscillation sur Q au point M est $\geq b - a$.

122. Théorème réciproque de Baire. — *S'il existe un ensemble parfait* $Q < P$ *sur lequel une fonction finie, f, est totalement discontinue, f n'est pas de classe* 1 *sur* P.

Si f est totalement discontinue sur Q, on peut assigner un nombre $\varepsilon_k > 0$, tel que l'ensemble E_k des points où l'oscillation de f

sur Q est $\geq \varepsilon_k$, soit compact sur Q (n° 120). Soit M un point de $E_k Q$ *intérieur* sur Q. Il est le centre d'un domaine Δ tel que l'ensemble parfait $Q\Delta$ appartienne à E_k. L'oscillation de f sur Q est alors $\geq \varepsilon_k$ en tout point de $Q\Delta$.

Soient a et $b > a$ deux nombres de différence $< \varepsilon_k$. L'ensemble

$$E(a < f < b) = E(f > a)E(f < b)$$

ne sera pas compact sur $Q\Delta$, car l'oscillation de f sur Q serait $< \varepsilon_k$ en un point de Q intérieur à cet ensemble sur $Q\Delta$.

Mais l'ensemble P est une somme d'ensembles de la forme $E(a < f < b)$, car on peut couvrir tout le domaine de variation de f avec des intervalles (a, b) consécutifs et empiétants. Donc ces ensembles ne peuvent être tous sommes d'ensembles fermés, car ces ensembles fermés étant non compacts sur $Q\Delta$, en même temps que leurs sommes partielles $E(a < f < b)$, leur somme générale P serait non compacte aussi (n° 107). Au contraire, $Q\Delta$ est $\leq$ P par hypothèse. Les ensembles $E(f > a)$, $E(f < b)$ ne sont donc pas tous des sommes d'ensembles fermés (car leurs produits ne le sont pas tous), et f n'est pas de classe 1.

De là l'énoncé de Baire :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction discontinue finie, f, soit de classe 1 *sur* P *borné et parfait, est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait* $Q \leq P$ (¹).

123. Remarques sur diverses démonstrations du théorème de Baire. — Ce très remarquable théorème a été démontré par M. Baire, dans sa Thèse (1899), par un procédé direct de résolution du problème auquel nous avons donné son nom. Cette première démonstration se bornait aux fonctions d'une seule variable. M. Lebesgue a prouvé le théorème pour les fonctions de plusieurs variables, dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1899), par un procédé de réduction au cas d'une

(¹) Dans toute cette théorie, nous avons supposé, pour plus de clarté et de simplicité, que P est borné. Cette hypothèse n'est pas essentielle. M. Baire a aussi généralisé les définitions de manière que son théorème subsiste pour f infinie (*Leçons*, [illegible]).

seule variable. M. Baire a étendu peu après sa méthode primitive de démonstration aux fonctions de plusieurs variables. Enfin il a donné une exposition systématique de cette théorie dans ses *Leçons sur les fonctions discontinues* de 1905.

La méthode de M. Baire fait appel au transfini. On doit à M. Lebesgue plusieurs démonstrations du théorème de Baire; ces démonstrations n'impliquent pas la notion du transfini. La première constitue la Note II des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes* de M. Borel. Cette méthode a servi de point de départ pour les extensions du théorème dont nous allons nous occuper dans le Chapitre suivant. Une autre démonstration, qui conduit au théorème de Lebesgue dont nous avons parlé au paragraphe précédent, a été publiée en 1905 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. Mais les méthodes de M. Lebesgue ne donnent pas la solution du problème de Baire.

La méthode que nous avons exposée ici est une sorte de synthèse des méthodes précédentes. Elle complète celles de M. Lebesgue, et, par l'introduction du théorème auxiliaire, elle simplifie notablement celle de M. Baire.



CHAPITRE VIII.

FONCTIONS DE CLASSE α
CONDITIONS GÉNÉRALISÉES DE LEBESGUE ET DE BAIRE.

I. — Théorèmes généraux sur les fonctions de classe α.

124. Définition. — L'extension aux fonctions de classe quelconque des résultats obtenus au Chapitre précédent, pour celles de classe 1, a été faite par M. Lebesgue dans son important Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1905). M. Lebesgue a considéré les fonctions de classe α sur un domaine. Nous trouvons plus simple de les définir sur un ensemble borné et parfait P, comme nous l'avons fait au Chapitre précédent pour les fonctions de classe 1.

Nous désignons donc par $f(x, y, z, \ldots)$ ou, plus simplement, par f une fonction univoque sur un ensemble parfait P (ayant autant de dimensions qu'il y a de variables) et nous considérons exclusivement les points de P, tant que le contraire n'est pas explicitement dit.

Une fonction f (finie ou non) est de classe α (>0) sur P si elle est limite de fonctions de classes $<\alpha$ et n'est pas elle-même de classe $<\alpha$. Une fonction continue sur P est de classe 0.

Nous allons établir un certain nombre de propriétés fondamentales des fonctions de classe α, qui compléteront celles déjà données précédemment (n° 34).

125. Théorèmes. — 1° *Si f est de classe α (>0) sur P parfait, une fonction φ, égale à f sur P et à la constante a partout ailleurs, est de classe α sur le continu.*

Ce théorème est déjà démontré pour la classe 1 (n° 118) et il s'étend aux autres classes par le procédé habituel de récurrence.

On pose toutes les fonctions égales à a hors de P, ce qui conserve leur classe.

Ce théorème est évidemment inexact pour $\alpha = 0$. Dans ce cas, il y a lieu de lui substituer le suivant :

2° *Si f est continue sur* P, *on peut définir une fonction φ partout continue et égale à f sur* P.

Définissons $\varphi(M)$ comme égale à $f(M)$ en un point M de P. Il reste à définir φ en un point M du complémentaire CP de manière que φ tende vers f quand M tend vers un point de P.

Remarquons d'abord qu'on peut extraire de P un ensemble dénombrable D ayant P pour dérivé. Il suffit pour cela de couvrir P d'un réseau (n° 54) et de choisir un point de P dans chaque maille qui en contient au moins un. Nous désignerons par M_1, M_2, ..., M_n, ... les points de D.

Soient maintenant M un point de CP, δ sa distance à P, Δ un domaine de rayon 2δ et de centre M, r_n la distance (qui peut être nulle) du point M_n au complémentaire $C\Delta$. Nous pouvons définir $\varphi(M)$ dans CP par la formule

$$\varphi(M) = \frac{\frac{r_1}{1} f(M_1) + \frac{r_2}{2^2} f(M_2) + \frac{r_3}{3^2} f(M_3) + \dots}{\frac{r_1}{1} + \frac{r_2}{2^2} + \frac{r_3}{3^2} + \dots}.$$

En effet, le numérateur et le dénominateur (positif dans CP) sont des séries uniformément convergentes, et sont (avec r_1, r_2, ...) des fonctions continues du point M. Donc φ est continue dans CP. Sa valeur est moyenne entre celles de f dans Δ. Quand M tend vers un point de P, Δ tend vers zéro avec δ et φ tend vers f.

126. Opérations sur les fonctions. — 1° *Les sommes et produits (limités) et les différences de fonctions finies de classes $\leqq \alpha$ sont de classe $\leqq \alpha$.*

La démonstration se fait par récurrence et est connue.

2° *Si f_1 et f_2 sont finies et de classes $\leqq \alpha$, et si f_2 ne s'annule pas sur* P, *le quotient $f_1 : f_2$ est de classe $\leqq \alpha$.*

Le théorème est connu pour $\alpha = 0$. Montrons qu'il est vrai pour α, s'il est vrai pour les classes antérieures.

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite positive tendant vers zéro. Supposons que f_1 et f_2 soient respectivement limites pour $n = \infty$ de f_{1n} et f_{2n} finies et de classes $\leqq \alpha$. Nous pouvons écrire

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1 f_2}{f_2^2} = \lim \frac{f_{1n} f_{2n}}{f_{2n}^2 + \varepsilon_n}.$$

Ce dernier quotient est de classe $\leqq \alpha$ par hypothèse, parce que son dénominateur ne s'annule pas, ce qui prouve la proposition.

3° *Si $f(t_1, t_2, \ldots)$ est continue sur un ensemble parfait Q de l'espace $t_1, t_2, \ldots$, et si $f_1(x, y, \ldots), f_2(x, y, \ldots), \ldots$ sont de classes $\leqq \alpha$ sur P parfait dans l'espace $x, y, \ldots$; si, en outre, le point $(f_1, f_2, \ldots)$ varie dans Q quand le point $(x, y, \ldots)$ varie dans P, alors la fonction $f(f_1, f_2, \ldots)$ de $x, y, \ldots$ est de classe $\leqq \alpha$ sur P.*

La démonstration habituelle par récurrence se fait sans difficulté, à condition de pouvoir considérer $f(t_1, t_2, \ldots)$ comme partout continue dans l'espace $t_1, t_2, \ldots$. Mais ceci est permis, par le théorème 2° du n° 125.

127. Fonction intermédiaire. — Considérons trois fonctions f_1, f_2, f_3. Si leurs valeurs sont distinctes au point M, il y en a une qui est intermédiaire; dans le cas contraire, il y a au moins deux valeurs égales et nous dirons qu'il y a une valeur doublée. Nous appelons *fonction intermédiaire f* entre f_1, f_2, f_3 la fonction qui prend, en chaque point, cette valeur intermédiaire ou cette valeur doublée.

On prouve, par le procédé récurrent, la proposition suivante :

Si les trois fonctions f_1, f_2, f_3 sont de classes $\leqq \alpha$, la fonction intermédiaire f est aussi de classe $\leqq \alpha$.

Nous supposons cette proposition établie.

Considérons le cas où deux des fonctions sont des constantes a et b $(a < b)$. La fonction intermédiaire entre a, f, b est ce que nous avons appelé *la fonction f bornée à a et b* (n° 34). Nous retrouvons donc ce principe : *On n'élève pas la classe d'une fonction f en bornant cette fonction* (n° 34, 1°).

128. Théorème. — Soient f_1 et f_2 deux fonctions finies non négatives et qui ne s'annulent pas à la fois. Leur quotient est déterminé et positif, mais peut être infini. Bornons-le aux nombres o et $a > 0$. Indiquons la fonction ainsi bornée par le symbole

$$\left[\frac{f_1}{f_2}\right]_0^a.$$

Je dis que *si f_1 et f_2 sont de classes $\leqq \alpha$, la fonction précédente est aussi de classe $\leqq \alpha$.*

Le théorème est immédiat pour $\alpha = 0$. Il faut l'étendre à la classe α, en l'admettant pour les classes $< \alpha$. Donnons-nous une suite positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers zéro et désignons par f_{1n}, f_{2n} des fonctions de classes $< \alpha$, finies et non négatives, qui tendent vers f_1 et f_2 quand n tend vers l'infini. Nous avons

$$\left[\frac{f_1}{f_2}\right]_0^a = \lim \left[\frac{f_{1n}}{f_{2n} + \varepsilon_n}\right]_0^a,$$

ce qui prouve la proposition, le dénominateur du second membre ne s'annulant pas.

129. Convergence à moins de ε près. — Considérons, d'une part, une fonction finie f et, d'autre part, une suite illimitée de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ également finies sur P.

Nous dirons que *f_n converge (pour $n = \infty$) vers f à moins de ε près sur un ensemble* $E < P$, *si, en tout point de* E, *les limites supérieure et inférieure (pour $n = \infty$) de f_n sont égales à f à moins de ε près.*

Démontrons le lemme suivant :

Supposons que f_n, de classe $< \alpha$, converge (pour $n = \infty$) vers f à moins de ε près; que φ_n, de classe $< \alpha$, converge aussi vers f, mais à moins de $\varepsilon : 2$ près; alors nous pouvons en déduire une fonction ψ_n, de classe $< \alpha$, qui (pour $n = \infty$) converge encore vers f à moins de $\varepsilon : 2$ près, mais satisfait, en outre, quel que soit n, à la condition

$$|f_n - \psi_n| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En effet, nous pouvons définir ψ_n comme étant la fonction inter-

médiaire entre les trois fonctions

$$f_n - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varphi_n, \quad f'_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

car les deux premières ont leur plus grande limite $\leq f + \frac{\varepsilon}{2}$ et les deux dernières leur plus petite limite $\geq f - \frac{\varepsilon}{2}$: telles sont aussi les bornes des limites d'indétermination de φ_n.

130. Fonction à ε près de classe α sur P (1). — *Une fonction finie f est de classe α sur P à ε près si elle est, sur P, à moins de ε près, limite (pour $n = \infty$) d'une fonction f_n de classe $< \alpha$.* Cette définition suppose donc $\alpha > 0$.

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Si f est, à ε près, de classe α sur P quelque petit que soit ε, f est de classe $\leq \alpha$ sur P.

Donnons à ε la suite des valeurs :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^k}, \quad \dots.$$

A la première valeur correspond une suite de fonctions, de classes $< \alpha$, convergeant vers f à moins de $\frac{1}{2}$ près ; désignons cette suite par

$$f_{11}, \quad f_{12}, \quad \dots, \quad f_{1n}, \quad \dots.$$

A la deuxième valeur correspond une suite analogue, convergeant vers f à moins de $\frac{1}{2^2}$ près :

$$f_{21}, \quad f_{22}, \quad \dots, \quad f_{2n}, \quad \dots;$$

à la troisième, une suite convergeant vers f à moins de $\frac{1}{2^3}$ près :

$$f_{31}, \quad f_{32}, \quad \dots, \quad f_{3n}, \quad \dots.$$

Enfin, en général, à la $k^{\text{ième}}$ valeur correspond une suite convergeant vers f à moins de $\frac{1}{2^k}$ près :

$$f_{k1}, \quad f_{k2}, \quad \dots, \quad f_{kn}, \quad \dots.$$

(1) Cette définition est plus générale que celle donnée par M. Lebesgue (*Journ. de Math.*, 1905).

Mais, en outre, nous pouvons admettre que, pour $k=2, 3, \ldots$, ces fonctions vérifient la condition

$$|f_{kn}-f_{(k-1)n}| \leqq \frac{1}{2^k}.$$

En effet, par l'application du lemme précédent, nous pouvons, de proche en proche, réaliser cette condition pour $k=2$, pour $k=3, \ldots$.

Ceci fait, je dis que la suite des fonctions, de classes $<\alpha$,

$$f_{11}, \quad f_{22}, \quad \ldots, \quad f_{nn}, \quad \ldots$$

converge vers f, ce qui prouvera donc le théorème fondamental énoncé.

Nous avons, en effet, pour $n>k$,

$$f_{nn}=f_{kn}+(f_{(k+1)n}-f_{kn})+\ldots+(f_{nn}-f_{(n-1)n}).$$

Il vient donc, à cause de la condition précédente,

$$f_{nn} \leqq f_{kn}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\ldots<f_{kn}+\frac{1}{2^k};$$

et, de même,

$$f_{nn}>f_{kn}-\frac{1}{2^k}.$$

Quand n tend vers l'infini, f_{kn} tend vers f à moins de $\frac{1}{2^k}$ près; donc f_{nn} tend vers f à moins de $\frac{1}{2^{k-1}}$ près. Comme k est arbitraire, f_{nn} tend vers f.

Ce théorème général renferme des cas particuliers importants :

Si, quelque petit que soit ε, f est, à moins de ε près, égale à une fonction φ de classe $\leqq\alpha$, f est de classe $\leqq\alpha$.

En effet, φ est limite d'une suite de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, de classes $<\alpha$, qui convergent vers f à moins de ε près; donc f est de classe α à ε près quel que soit ε.

La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classes $\leqq\alpha$ et la somme d'une série uniformément convergente de telles fonctions sont des fonctions de classe α au plus.

Il suffit de considérer le premier cas. Si la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ de fonctions de classes $\leqq \alpha$ converge uniformément vers f, cette fonction f est, à moins de ε près, égale à une fonction f_n de classe $\leqq \alpha$, ce qui ramène à la proposition précédente.

2. — Ensembles O et F de Lebesgue.

131. Préliminaire. — Nous connaissons la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit de classe 1. Nous connaissons même deux expressions très différentes de cette condition, l'une qui constitue le théorème de Lebesgue (n° 113), l'autre qui constitue le théorème de Baire (n° 122). Il s'agit maintenant de savoir si l'on peut généraliser ces théorèmes et obtenir des caractères distinctifs analogues pour les fonctions de classe α. Cette question a été étudiée par M. Lebesgue dans le Mémoire cité (1905). La conclusion est que l'énoncé de Baire ne se généralise qu'imparfaitement, et nous y reviendrons dans le paragraphe suivant. Par contre, on peut obtenir une généralisation adéquate de l'énoncé de Lebesgue, et c'est de cela que nous allons d'abord nous occuper.

Rappelons que le théorème de Lebesgue caractérise les fonctions f qui sont de classe 1 par une propriété de structure des ensembles $E(f > A)$, $E(f < A)$, lesquels sont *sommes d'ensembles fermés*. La généralisation de ce résultat s'obtient moyennant une généralisation de la notion des ensembles ouverts et fermés. Ce sont les ensembles O et F de Lebesgue, qui sont déjà très intéressants par eux-mêmes.

Nous allons donc définir ces ensembles et étudier leurs propriétés. Nous nous écarterons toutefois de l'exposé de M. Lebesgue. Nous pensons qu'il y a lieu de modifier légèrement ses définitions et nous apporterons quelques nouveaux résultats qui complètent et précisent les siens.

132. Définition des ensembles F et O de classe α. — Nous considérons un ensemble borné et parfait P et des ensembles quelconques E contenus dans P. Les complémentaires se prennent par rapport à P.

Un ensemble E *est fermé ou* F *de classe* α, s'il existe une fonction θ, définie sur P, de classe $\leqq \alpha$ et telle qu'on ait

$$E = E(\theta = 0), \tag{1}$$

c'est-à-dire telle que E soit l'ensemble des points de P où la fonction θ est nulle.

Un ensemble E *est ouvert ou* O *de classe* α, s'il existe une fonction θ, définie sur P, de classe $\leqq \alpha$ et telle qu'on ait

$$E = E(\theta \neq 0). \tag{2}$$

D'après cela, *le complémentaire d'un* F *de classe* α *est un* O, *et réciproquement.*

Les ensembles F et O de classe zéro sont fermés et ouverts au sens primitif (nº 105).

Un ensemble F ou O de classe α est encore F ou O de toutes les classes plus élevées. Notre définition diffère, en cela, de celle de M. Lebesgue, pour qui un ensemble n'est F ou O que d'une seule classe α, la première où les conditions précédentes ont lieu.

Il est utile de remarquer que, dans les conditions (1) et (2), on peut supposer la fonction θ bornée (car on peut la borner sans élever sa classe) et positive ou nulle (car on peut la remplacer par son carré). On peut donc aussi définir les F et les O par les formules

$$F = E(\theta = 0), \qquad O = E(\theta > 0).$$

Voici d'abord quelques théorèmes simples sur ces ensembles [1] :

1º *L'ensemble* E *sera* F *de classe* α, *s'il existe une fonction* f *de classe* $\leqq \alpha$ *telle qu'on ait*

$$E = E(a \leqq f \leqq b).$$

En effet, si l'on considère une fonction continue $\theta(t)$ nulle de a à b et positive ailleurs, par exemple la distance du point t à l'intervalle (a, b), on a

$$E = E[\theta(f) = 0],$$

et $\theta(f)$ est de classe $\leqq \alpha$ (nº 126, 3º).

---

[1] Les deux premières propriétés sont prises comme définitions des F et des O par M. Lebesgue.

2° *L'ensemble* E *sera* O *de classe* α, *s'il existe une fonction* f *de classe* $\leq \alpha$ *telle qu'on ait*

$$E = E(a < f < b).$$

En effet, si l'on considère une fonction continue $\theta(t)$ positive à l'intérieur de (a, b) et nulle ailleurs, par exemple la distance de t au complémentaire de (a, b) sur le continu, on a

$$E = E[\theta(f) = 0].$$

3° *Les sommes et produits limités d'ensembles* F *de classe* α *sont* F *de classe* α.

Il suffit de considérer deux ensembles. On a, les θ étant ≥ 0,

$$E(\theta_1 = 0) + E(\theta_2 = 0) = E(\theta_1 \theta_2 = 0),$$
$$E(\theta_1 = 0) E(\theta_2 = 0) = E(\theta_1 + \theta_2 = 0),$$

ce qui prouve la proposition.

4° *Les sommes et produits limités d'ensembles* O *de classe* α *sont* O *de classe* α.

Ce théorème se ramène au précédent par les complémentaires.

5° *Un produit infini d'ensembles* F *de classe* α *est un* F *de classe* α.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ ces ensembles; ensuite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ des fonctions, non négatives, de classes $\leq \alpha$, telles que

$$E_n = E(\theta_n = 0).$$

On peut borner θ_n de manière que θ_n soit $< \frac{1}{2^n}$; alors la fonction

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n + \ldots$$

est somme d'une série uniformément convergente de fonctions de classes $\leq \alpha$ et, par conséquent, elle est de classe $\leq \alpha$ (n° 130). Or on a

$$E_1 E_2 \ldots E_n \ldots = E(\theta = 0),$$

ce qui prouve la proposition.

6° *Une somme infinie d'ensembles* O *de classe* α *est un* O *de classe* α.

Ce théorème se ramène au précédent par les complémentaires.

133. **Définition des ensembles A de classe α. Rôle de la fonction caractéristique.** — Nous allons ajouter une nouvelle définition aux précédentes, celle des ensembles A de classe α qui n'ont pas été considérés par M. Lebesgue, mais dont l'introduction éclaircit et précise la théorie.

Nous dirons qu'*un ensemble* E *est ambigu ou* A *de classe* α, *s'il est à la fois* F *et* O *de classe* α. D'après cela, *le complémentaire d'un* A *est un* A. Si E est A de classe α, il est encore A de toute classe $> \alpha$.

Les propriétés des ensembles A sont étroitement liées à celles de leurs fonctions caractéristiques, comme nous allons le montrer.

1° *Tout ensemble* E *est* A *de la classe de sa fonction caractéristique* φ, *et ne l'est dans aucune classe antérieure.*

D'abord, E est à la fois F et O de la classe de φ, car on a

$$E = E(\varphi > 0) = E(\varphi - 1 = 0).$$

Réciproquement, si E est à la fois F et O de classe α, sa caractéristique est de classe α au plus. Soit, en effet,

$$E = E(\theta_1 > 0) = E(\theta_2 = 0),$$

où θ_1 et θ_2 sont non négatifs et de classe $\leq \alpha$. Alors le quotient, borné à 0 et 1,

$$\varphi = \left[\frac{\theta_1}{\theta_2}\right]_0^1,$$

qui est la caractéristique de E, est de classe $\leq \alpha$ (n° 128), ce qui prouve la proposition.

2° *Tout ensemble* F *ou tout ensemble* O *de classe* α *est un ensemble* A *de classe* $\alpha + 1$.

Considérons un F de classe α

$$F = E(\theta = 0),$$

où θ (non négatif) est de classe $\leq \alpha$; sa caractéristique φ est définie

par la relation

$$\varphi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{1+n^{\psi}};$$

elle est donc de classe $\alpha+1$ au plus.

En résumé *tout ensemble* E *est* A, *donc en même temps* F *et* O, *de la classe de sa fonction caractéristique et des classes suivantes; il peut être exceptionnellement* F *ou* O (*pas en même temps*) *de la classe qui précède celle de sa caractéristique*.

134. Théorèmes de structure. — 1° *Tout ensemble* E, *qui est limite d'ensembles* F *de classe* α, *est* O *de classe* $\alpha+1$; *tout ensemble* E, *limite de* O *de classe* α, *est* F *de classe* $\alpha+1$; *tout ensemble* E, *limite de* A *de classe* α, *est* A *de classe* $\alpha+1$.

La deuxième proposition revient à la première par les complémentaires et la troisième est la conséquence des deux précédentes; il suffit donc de démontrer la première.

Supposons que E soit limite d'ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_k, \ldots$ de classe α. Considérant E comme plus petite limite, nous avons

$$E = F_1 F_2 F_3 \ldots + F_2 F_3 \ldots + F_3 \ldots + \ldots.$$

Tous ces termes sont F de classe α comme produits de F de classe α (n° 132). *Toute limite d'ensembles* F *de classe* α *est donc une somme d'ensembles* F *de classe* α. Mais un F de classe α est A, donc O, de classe $\alpha+1$. Par conséquent E, somme de O de classe $\alpha+1$, est O de classe $\alpha+1$ (n° 132).

Il y a encore lieu d'observer que *toute limite d'ensembles* O *de classe* α *est un produit de* O *de classe* α, une limite de O se ramenant à une limite de F par les complémentaires.

2° *Réciproquement, si* α ($\alpha>0$) *est de première espèce, tout ensemble* O *de classe* α *est limite de* F *de classe* $\alpha-1$, *donc somme de* F *de classe* $\alpha-1$; *tout* F *de classe* α *est limite de* O, *donc produit de* O *de classe* $\alpha-1$; *tout* A *de classe* α *est à la fois somme de* F *et produit de* O *de classe* $\alpha-1$.

Comme dans le cas précédent, il suffit de démontrer la première

de ces propositions. Soit donc

$$O = E(\theta > 0),$$

où θ, de classe $\leqq \alpha$, est limite de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ de classes $< \alpha$.

Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ une suite positive tendant vers zéro et posons

$$E_n^k = E(f_n \geqq \varepsilon_k).$$

Comme on l'a vu au n° **114**, l'ensemble $E(\theta > 0)$ est la somme de tous les ensembles

$$F_n^k = E_n^k E_{n+1}^k \ldots$$

qui sont, dans ce cas-ci, des ensembles F de classe $< \alpha$ (en même temps que les E_n^k). Donc l'ensemble considéré est limite d'ensembles F de classe $\alpha - 1$.

3° *Si α est de deuxième espèce, tout ensemble* A *de classe α est limite de* A *de classes $< \alpha$.*

En effet, soit φ la caractéristique de A de classe α; c'est une fonction de classe $\leqq \alpha$ qui ne prend que les deux valeurs 0 et 1. Mais φ est limite de la suite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ de fonctions de classes $< \alpha$, qui converge vers 0 ou 1. Donc l'ensemble A considéré est limite de l'ensemble

$$E\left(\theta_n > \frac{1}{2}\right)$$

qui est O de classe $< \alpha$, donc A de la classe suivante. Or cette classe est encore $< \alpha$ qui est supposé de deuxième espèce.

Toutefois, dans ce nouveau cas, le passage à la limite comporte généralement deux opérations infinies superposées, une somme et un produit, à effectuer à partir des ensembles de classes $< \alpha$. Ces opérations ne se réduisent à une seule que dans des cas particuliers.

4° *Réciproquement, toute limite de* A *de classes $< \alpha$ est* A *de classe α.*

Ce théorème rentre dans 1° si α est de première espèce. La démonstration suivante s'applique à tous les cas. Si E est limite de $A_1, A_2, \ldots$ de classes $< \alpha$, la caractéristique φ de E est limite des

caractéristiques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ de $A_1, A_2, \ldots$; donc elle est de classe $\leqq \alpha$ et, par conséquent, E est A de classe α.

5° *Si α ($\alpha > 0$) est de première ou de deuxième espèce, un* O *de classe α est une somme de* A *de la même classe, un* F *de classe α est un produit de* A *de la même classe, et réciproquement.*

Le théorème est vrai si α est de première espèce, car il est la conséquence du théorème 3° qui est plus précis. Le théorème est donc peu utile dans ce cas.

Considérons maintenant un ensemble

$$O = E(\mathfrak{f} > 0),$$

où $\mathfrak{f}$ est de classe α de deuxième espèce. Comme dans la démonstration du théorème (2°), O est la somme des ensembles F^k_n. Ceux-ci sont des produits d'ensembles E^k_n qui sont F, donc aussi A de classes $\leqq \alpha$. Donc les F^k_n sont A de classe α, et O est leur somme.

Le théorème est prouvé pour un O. Le cas d'un F se ramène à celui-ci par les complémentaires.

La réciproque du théorème est évidente, un produit de A est un F (comme produit de F), une somme de A est un O (comme somme de O) (n° 132).

Les théorèmes précédents donnent donc un procédé systématique de construction par addition et multiplication, à partir des ensembles F et O de classe zéro, de tous les ensembles mesurables (B) des classes successives. Voici ce procédé, déjà indiqué par M. Lebesgue :

Désignons, en général, par O_α et F_α, les ensembles ouverts et fermés de classe α; ceux de classe 1 s'obtiennent comme sommes ou produits des précédents :

$$O_1 = \Sigma F_0, \qquad F_1 = \Pi O_0,$$

ceux de classe 2 de la même manière :

$$O_2 = \Sigma F_1, \qquad F_2 = \Pi O_1,$$

et ainsi de suite pour tous les ordres finis.

Pour le premier ordre transfini ω, il faut d'abord former des ensembles A_ω particuliers par addition ou multiplication d'ensem-

bles A déjà construits :

$$A'_\omega = \Sigma A, \qquad A''_\omega = \Pi A.$$

Ce sont déjà des F et des O de classe ω ; tous les autres, y compris les A_ω restant, s'obtiendront par les formules

$$O_\omega = \Sigma A''_\omega, \qquad F_\omega = \Pi A'_\omega.$$

On continue ainsi de suite.

3. — Condition généralisée de Lebesgue.

135. Définition. — Considérons une fonction f finie sur l'ensemble borné et parfait P. Soit E un ensemble quelconque contenu dans P. Nous dirons que *f est à ε près de classe α sur* E ($\alpha > 0$), si, sur E, f est à ε près limite de fonctions de classes $< \alpha$; c'est-à-dire s'il existe une suite de fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_n, \ldots$, de classes $< \alpha$ et *finies* sur P, convergeant vers f à moins de ε près sur E (n° 129).

D'ailleurs on ne change pas la définition en demandant que les fonctions f_n vérifient sur tout l'espace les conditions stipulées sur P, car on étend à tout l'espace ces conditions supposées vérifiées sur P en attribuant à toutes les fonctions une même valeur constante hors de P (n° 125).

Cette définition rentre dans celle précédemment donnée si E s'étend à P tout entier (n° 130).

La généralisation de la condition de Lebesgue est la conséquence de théorèmes plus généraux donnés par cet auteur, mais que nous remplacerons ici par un seul théorème plus précis qui les contient tous et que voici :

136. Théorème. — *Soit f une fonction finie sur* P. *Si un ensemble* $E < P$ *est une somme (finie ou infinie) d'ensembles* A *ou d'ensembles* O *de classe* α ($\alpha > 0$) *sur lesquels f est à ε près de classe α, alors f est à ε près de classe α sur* E.

Tout ensemble O est une somme de A de la même classe (n° 134, 5°) ; il suffit donc de considérer le premier cas.

Supposons d'abord qu'on ait

$$E = A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots,$$

où les ensembles A_k sont A de classe $\alpha > 0$ *de première espèce*.

Considérons l'un de ces ensembles A_k : il est à la fois produit de O et somme de F de classe $< \alpha$ (n° 134, 2°). On peut donc (avec n de ces facteurs ou n de ces termes) définir deux ensembles de classe $< \alpha$, l'un $O_{kn} > A_k$, l'autre $F_{kn} < A_k$, et qui ont tous deux pour limite A_k quand n tend vers l'infini. Il existe alors deux fonctions correspondantes non négatives et de classe $< \alpha$, φ_{kn} et ψ_{kn} telles qu'on ait

$$O_{kn} = E(\varphi_{kn} > 0), \qquad F_{kn} = E(\psi_{kn} = 0).$$

Ces fonctions ne s'annulent pas en même temps, de sorte que leur quotient, limité à 0 et 1,

$$\theta_{kn} = \left[\frac{\varphi_{kn}}{\psi_{kn}}\right]_0^1$$

est de classe $< \alpha$ (n° 128). Cette fonction θ_{kn} (comprise entre 0 et 1) est égale à 1 dans F_{kn} et à 0 dans CO_{kn}.

D'autre part, sur A_k, f est à ε près limite pour $n = \infty$ d'une fonction f_{kn} finie et de classe $< \alpha$ sur P.

Ayant ainsi défini θ_{kn} et f_{kn} pour tous les indices k, formons la fonction, finie sur P et de classe $< \alpha$,

$$\begin{aligned}\Phi_n = f_{1n}\theta_{1n} + f_{2n}(1-\theta_{1n})\theta_{2n} + f_{3n}(1-\theta_{1n})(1-\theta_{2n})\theta_{3n} + \ldots \\ + f_{nn}(1-\theta_{1n})(1-\theta_{2n})\ldots(1-\theta_{n-1,n})\theta_{nn}.\end{aligned}$$

Je dis que Φ_n tend, à ε près, vers f en tout point M de E.

En effet, soit A_k le premier ensemble de la suite A_1, A_2, … auquel appartient le point M. Je dis que l'on aura au point M, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\Phi_n = f_{kn},$$

ce qui prouvera la proposition.

En effet, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, le point M appartiendra à F_{kn} et sera exclu de O_{1n}, O_{2n}, …, $O_{k-1,n}$. Dès ce moment, θ_{1n}, θ_{2n}, …, $\theta_{k-1,n}$ sont nuls et θ_{kn} est égal à 1. Les termes en f_{1n}, f_{2n}, …, $f_{k-1,n}$ sont nuls dans Φ_n, celui en f_{kn} se

réduit à f_{kn} et tous les suivants s'annulent avec le facteur $(1 - \theta_{kn})$.

La construction de la fonction Φ_n et le raisonnement précédent subsistent si α est de *deuxième espèce*, mais à condition de modifier la définition de la fonction θ_{kn}, qui n'en devient d'ailleurs que plus simple. Maintenant A_k est limite pour $n = \infty$ de A_{kn} de classe $< \alpha$ (n° 134, 3°) et l'on peut définir θ_{kn} (de classe $< \alpha$) comme étant la caractéristique de A_{kn}. L'ensemble unique A_{kn} tiendra la place des deux ensembles F_{kn} et O_{kn} dans le raisonnement qui prouve la convergence de Φ_n.

137. **Corollaire.** — *Si l'ensemble* P *lui-même est, quelque petit que soit* ε, *une somme d'ensembles* O *de classe* α, *sur lesquels* f *est à* ε *près de classe* α, *alors* f *est de classe* $\leqq \alpha$ *sur* P.

En effet, f étant de classe α à ε près sur P quel que soit ε, f est de classe $\leqq \alpha$ sur P, en vertu du théorème du n° 130.

138. **Condition généralisée de Lebesgue.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, finie ou non,* f *soit de classe* $\alpha > 0$ *sur* P, *est que, quelle que soit la constante* a, *les ensembles*

$$E(f > a), \qquad E(f < a)$$

soient O *de classe* α *et ne soient pas tous de classe moindre; ou, ce qui revient au même, que les ensembles (complémentaires)*

$$E(f \leqq a), \qquad E(f \geqq a)$$

soient F *de classe* α *et ne soient pas tous de classe moindre.*

Supposons d'abord que la fonction f soit finie. Donnons-nous un nombre ε positif. L'ensemble P est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles

$$E[k\varepsilon < f < (k+2)\varepsilon]$$

quand on donne à k toutes les valeurs entières positives, nulle et négatives. Ces ensembles sont O de classe α par hypothèse (comme produits de deux ensembles de la forme prévue dans l'énoncé). Dans chacun d'eux, f est à 2ε près une constante; donc, à 2ε près,

de classe zéro $\leqq \alpha$. Par conséquent, 2ε étant arbitraire, f est de classe α sur P, en vertu du corollaire précédent.

Si f devient infinie, on pose

$$z = \frac{1}{1+e^{f}}.$$

Alors z est bornée, la démonstration se fait pour z et le théorème s'étend à f.

Ce théorème est la généralisation précise de celui de Lebesgue sur les fonctions de classe 1 ; et, si α est de première espèce, il en généralise exactement l'énoncé. En effet, un O de classe α est une somme de F de la classe précédente $\alpha - 1$, et réciproquement. *La condition nécessaire et suffisante pour que f soit de classe $\leqq \alpha$ de première espèce, est donc que les ensembles* $E(f > a)$, $E(f < a)$ *soient des sommes d'ensembles* F *de classe* $\alpha - 1$.

Si $\alpha = 1$, les ensembles F de classe $\alpha - 1$ sont les ensembles fermés au sens absolu et l'on retrouve le théorème de Lebesgue pour la classe 1.

Si α est de deuxième espèce, l'énoncé se transforme, mais les fonctions de classe α demeurent néanmoins caractérisées par la structure des ensembles considérés.

4. — Condition généralisée de Baire.

139. Définition. — Nous avons déjà défini une fonction à ε près de classe α, soit sur P (n° 130), soit sur un ensemble E contenu dans P (n° 135). Ajoutons encore une nouvelle définition aux deux précédentes :

Une fonction f, finie sur P, *est à ε près de classe α sur un ensemble* $E < P$ *en un point* M *de* E, *si le point* M *est le centre d'un domaine* Δ *de rayon assez petit pour que f soit à ε près de classe α sur l'ensemble* $E\Delta$.

Cette définition permet d'énoncer les théorèmes suivants, voisins de ceux qu'on trouve dans le Mémoire de M. Lebesgue et qui conduisent à la généralisation du théorème de Baire, dans la mesure où celle-ci est possible.

140. Théorème I. — *Si une fonction, f, finie sur P, est à ε près de classe $\alpha > 0$ en tout point de $E < P$, et si, de plus, E est, soit F de classe zéro, soit O de classe 1, f est à ε près de classe α sur* E.

Supposons d'abord que E soit F de classe zéro, c'est-à-dire que E soit fermé. Tout point M de E est le centre d'un domaine Δ tel que f est à ε près de classe α dans $E\Delta$; donc, en vertu du lemme de Borel, tout E peut être couvert avec un nombre limité de Δ, et E est la somme d'un nombre limité d'ensembles $E\Delta$ fermés (ou F de classe zéro), donc A de classe $1 \leqq \alpha$, sur lesquels f est à ε près de classe α. Alors, en vertu du théorème du n° 136, f est à ε près de classe α sur E.

Supposons, en second lieu, que E soit O de classe 1, donc une somme de F de classe zéro. Sur ces F de classe zéro, f est à ε près de classe α, en vertu de la démonstration précédente. Comme les F de classe zéro sont A de classe $1 \leqq \alpha$, f est à ε près de classe α sur leur somme E, en vertu du théorème du n° 136.

Du théorème précédent on déduit le corollaire suivant :

En particulier, *si une fonction finie, f, est à ε près de classe $\alpha > 0$ en tout point de l'ensemble parfait* P *lui-même, f est à ε près de classe α sur* P. *Si, de plus, cette condition se réalise quel que soit ε, f est de classe $\leqq \alpha$ sur* P (n° 130).

141. Théorème II. — *Si une fonction finie, f, n'est pas à ε près de classe α ($\alpha > 0$) sur* P, *l'ensemble des points de* P *où elle n'est pas à ε près de classe α sur* P *est un ensemble parfait* Q. *De plus, f n'est à ε près de classe α sur* Q *en aucun point de* Q.

L'ensemble Q n'est pas nul, en vertu du corollaire précédent. On voit immédiatement qu'il est fermé, car si f est à ε près de classe α au point M, cette condition est réalisée aussi dans un domaine autour de M, de sorte que le complémentaire de Q est ouvert.

Soit M un point de Q, je dis qu'au point M, f n'est pas à ε près de classe α sur Q, parce que si f était à ε près de classe α sur Q, elle le serait aussi sur P. C'est ce que je vais montrer.

En effet, M serait alors le centre d'un domaine Δ tel que f fût à ε près de classe α sur $Q\Delta$. Faisons la décomposition (le complé-

mentaire étant relatif à P :

$$\Delta P = \Delta Q + \Delta . CQ.$$

Les ensembles Δ, Q et CQ, dont les deux premiers sont F et le dernier O de classe zéro, sont tous trois O et F de classe 1. Donc $\Delta . CQ$ est O de classe 1, et f est à ε près de classe α sur $\Delta . CQ$, parce qu'elle l'est en chaque point de cet ensemble (théorème I précédent). Donc f est à ε près de classe α sur les deux ensembles ΔQ et $\Delta . CQ$, qui sont O de classe $\alpha + 1$; donc f l'est aussi sur leur somme ΔP, en vertu du théorème du n° 136.

Je dis enfin que Q est parfait, car il ne peut contenir de point isolé. En effet, au voisinage d'un point isolé d'un ensemble, toute fonction se réduit à une constante sur l'ensemble et est à ε près de classe zéro. Comme f n'est à ε près de classe zéro en aucun point de Q, ces points ne sont pas isolés.

Le théorème précédent conduit immédiatement à l'énoncé suivant, qui est la généralisation du théorème de Baire :

142. Condition généralisée de Baire. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction finie, f, soit de classe α sur l'ensemble parfait P, est que, quels que soient le nombre positif ε et l'ensemble parfait Q contenu dans P, on puisse trouver un point M de Q où f est à ε près de classe α sur Q.*

Voyons comment ce théorème généralise celui de Baire.

Considérons le cas où $\alpha = 1$. La condition précédente est évidemment remplie si la fonction f est ponctuellement discontinue sur Q, car f est constante à ε près, donc à ε près de classe $0 < 1$ sur Q en tout point M de continuité sur Q. Le théorème précédent donne donc immédiatement la condition suffisante de Baire. Il n'est pas équivalent au théorème complet, parce qu'il ne prouve pas que la condition soit nécessaire.

Toutefois cette lacune est facile à combler et l'on obtient par cette voie, pour le théorème de Baire, une démonstration relativement simple indiquée par M. Lebesgue [1], et qui se rattache de très près à la première démonstration sans transfini du même auteur [2].

---

[1] *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 1905).

[2] Note II des *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel.

Pour compléter la démonstration du théorème de Baire, il faut montrer qu'une fonction f, de classe 1, est ponctuellement discontinue sur Q. Pour cela, il faut montrer que l'ensemble des points où l'oscillation sur Q est $\geqq \varepsilon$ n'est pas compact sur Q. Cela veut dire que, quel que soit le domaine Δ ayant pour centre un point M de Q, il y a un point de QΔ où l'oscillation de f est $< \varepsilon$.

Voici le raisonnement de M. Lebesgue :

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ les fonctions continues qui tendent vers f finie. Considérons l'ensemble des points de Q

$$E_n^p = E\left(|f_n - f_{n+p}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Tout point de l'ensemble QΔ appartient aux ensembles E_n^p quel que soit p, à partir d'une valeur suffisamment grande de n ; alors il appartient à l'ensemble, fermé comme les précédents,

$$F_n = E_n^1 E_n^2 E_n^3 \ldots.$$

Donc QΔ est contenu dans la somme de tous les ensembles F_n et l'un d'entre eux au moins, F_n, est *compact* sur QΔ. Soit M_1 un point de F_nQΔ *intérieur* sur QΔ ; c'est le centre d'un domaine Δ_1 où l'on a sur Q, quel que soit p,

$$|f_n - f_{n+p}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donc} \qquad |f_n - f| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or f_n est continue, donc l'oscillation sur Q au point M_1 de QΔ est $\leqq \varepsilon$.

On trouvera encore, dans le Mémoire de M. Lebesgue ([1]), un autre théorème, plus compliqué que le précédent, donnant une généralisation plus complète à certains égards du théorème de Baire et qui s'en rapproche davantage par l'énoncé. Ce théorème est intéressant malgré le caractère un peu artificiel du rapprochement.

5. — Existence des classes.

143. Remarques préliminaires. — L'existence de fonctions de toutes classes a été établie par M. Lebesgue dans son Mémoire *Sur*

([1]) *Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 191.

des fonctions représentables analytiquement (1). La démonstration que nous allons donner de ce théorème fondamental sera dans le fond celle de M. Lebesgue, mais seulement présentée sous une forme plus élémentaire.

Avant d'aborder cette démonstration, il convient de généraliser un théorème déjà démontré (n° **126**, 3°) :

Si f est une fonction de Baire de $t_1, t_2, \ldots$ et si $t_1, t_2, \ldots$ sont des fonctions de Baire de $x, y, \ldots, f$ est une fonction de Baire de $x, y, \ldots$

Ce théorème est déjà démontré si f est une fonction continue (ou de classe zéro) de $t_1, t_2, \ldots$; il se généralise par récurrence. Le théorème, supposé vrai pour les classes $< \alpha$, s'étend à α par un simple passage à la limite.

Pour établir l'existence des classes, il suffit évidemment de considérer les fonctions d'une seule variable x sur l'intervalle (0, 1) de x.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans cet intervalle; quelque petit que soit ε positif, on peut partager l'intervalle (0, 1) en parties dans lesquelles l'oscillation de f est $< \varepsilon$. Si l'on remplace la courbe $y = f(x)$ par sa corde dans chacune de ces parties, on forme une ligne polygonale, dont l'ordonnée est à ε près égale à $f(x)$. On peut aussi remplacer les sommets de ce polygone par d'autres sommets aussi voisins qu'on veut des premiers, mais de coordonnées rationnelles. On en conclut qu'une fonction continue $f(x)$ est, à ε près, égale à l'ordonnée d'une ligne polygonale dont les sommets sont de coordonnées rationnelles. Nous dirons, en abrégé, que cette ordonnée, fonction de x, est un *polygone rationnel*, $P(x)$.

Une fonction de classe zéro est donc limite d'une suite uniformément convergente de polygones rationnels; mais une fonction de classe 1 est aussi limite de polygones rationnels, car elle est limite, pour $n = \infty$, d'une fonction f_n de classe zéro et, par suite, du polygone P_n qui diffère infiniment peu de f_n.

---

(1) [illegible] M. [illegible] *[illegible]*, t. XXX).

Ceci nous engage, pour la commodité du discours, à introduire ici une petite variante dans la classification de Baire.

Nous rangerons dans la classe zéro les polygones rationnels, dans la classe 1 les limites de fonctions de classe zéro, et ainsi de suite. D'après ce qu'on vient d'expliquer, cette modification ne porte que sur les deux premières classes de Baire : elle reporte dans la classe 1 une partie des fonctions de classe zéro. A partir de la classe 2, la classification de Baire reste intacte.

Nous allons démontrer qu'il existe, dans toutes les classes, des fonctions comprises entre 0 et 1. Comme une fonction de classe α, comprise entre ces nombres, est toujours limite de fonctions des classes antérieures qu'on peut supposer bornées aux mêmes nombres, on voit que nous pouvons former, de proche en proche, toutes les fonctions des classes successives, comprises entre 0 et 1, en considérant exclusivement des limites de fonctions qui satisfont à cette condition.

Voici maintenant le théorème fondamental, sur lequel repose la démonstration :

144. Théorème. — *Quelle que soit la classe α, toute fonction de Baire* (*comprise entre* 0 *et* 1) *de classe* $< \alpha$ *peut se déduire d'une fonction de Baire à deux variables, convenablement définie,*

$$f_\alpha(x, t),$$

en attribuant à t une valeur particulière, intérieure à l'intervalle (0, 1).

Nous allons faire la démonstration par récurrence.

Démontrons d'abord le théorème pour $\alpha = 1$.

Les fonctions de la classe zéro (comprises entre 0 et 1), auxquelles nous avons donné le nom de *polygones rationnels*, sont dénombrables. En effet, les coordonnées des sommets sont rationnelles et appartiennent à l'intervalle (0, 1). Supposons les exprimées en fraction irréductible [1] et désignons par *hauteur*, H, *d'un polygone* P la somme des dénominateurs des coordonnées de tous ses sommets. Il ne peut y avoir qu'un nombre limité de

[1] On donnera le dénominateur 1 aux coordonnées 0 et 1.

polygones de même hauteur et, par conséquent, on peut dénombrer les polygones rationnels par ordre de hauteur croissante. Nous désignerons ces polygones par

$$P_2(x), \quad P_3(x), \quad \ldots, \quad P_n(x), \quad \ldots$$

en commençant à l'indice 2 pour la symétrie des notations ultérieures.

Définissons maintenant une fonction $\theta(t)$, de classe 1, égale à 1 pour $t = 1$ et à zéro pour toutes les autres valeurs de t; nous pouvons poser

$$f(x, t) = P_2(x)\,\theta(2t) + P_3(x)\,\theta(3t) + \ldots + P_n(x)\,\theta(nt) + \ldots.$$

En effet, cette fonction de Baire se réduit à P_n pour $t = \frac{1}{n}$ et s'annule si t est d'une autre forme.

Démontrons, en second lieu, le théorème pour α de première espèce. Nous pouvons admettre qu'on a déjà construit une fonction de Baire,

$$f_{\alpha-1}(x, t),$$

qui renferme toutes les fonctions $f(x)$ des classes $\leq \alpha - 1$ par l'attribution à t d'une valeur particulière correspondante entre 0 et 1 (limites exclues) et qui s'annule à ces limites.

Considérons une valeur de t comprise entre 0 et 1 et développons t en fraction décimale illimitée (au besoin avec la période 0, mais en excluant la période 9)

$$(1) \qquad t = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots.$$

Si t varie, un chiffre décimal a_n (de rang donné) est une fonction de t, qui prend des valeurs constantes dans un nombre limité d'intervalles consécutifs entre 0 et 1. C'est donc une fonction de Baire de classe 1.

Définissons de nouvelles fonctions $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ de t, en posant (ce qui peut sans inconvénient introduire la période 9 et la valeur 1)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0, a_1 a_3 a_6 \ldots, \\ t_2 = 0, a_2 a_5 a_9 \ldots, \\ t_3 = 0, a_4 a_8 a_{13} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les indices des chiffres de t_1 sont les nombres impairs, ceux des chiffres de t_2 admettent une fois le facteur 2, ceux des chiffres de t_3 deux fois, etc. Les fonctions du tableau (2) sont, dans l'intervalle (0, 1), des fonctions de Baire de classe 1 (comme séries uniformément convergentes de telles fonctions). Elles sont toujours comprises entre 0 et 1. On peut achever de les définir, quel que soit t, en les posant nulles hors de l'intervalle (0, 1).

Je dis maintenant que l'on peut poser, en considérant la plus grande limite,

$$(3) \qquad f_\alpha(x, t) = \overline{\lim_{n=\infty}} f_{\alpha-1}(x, t_n),$$

car cette fonction est une fonction de Baire, en vertu du théorème du début du numéro précédent; elle est comprise entre 0 et 1 et elle représente certainement, par l'attribution à t d'une valeur convenable entre 0 et 1, toutes les fonctions $f(x)$ des classes $< \alpha$.

En effet, $f(x)$ de classe $< \alpha$ est limite de fonctions de classes $< \alpha - 1$, comprises dans la formule

$$f_{\alpha-1}(x, t)$$

par l'attribution à t de valeurs particulières $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ entre 0 et 1. Or, on peut exprimer $t_1, t_2, \ldots$ en fractions décimales (en excluant derechef la période 9) et l'on peut, par la loi de numérotation des indices du tableau (2), reconstituer la valeur correspondante de t (avec exclusion assurée de la période 9) fixée par la formule (1). Cela fait, on a

$$f(x) = f_\alpha(x, t).$$

Il peut évidemment arriver, si la plus grande limite diffère de la plus petite dans la formule (3), que cette formule fournisse aussi des fonctions de classe α, mais cela n'a aucune importance au point de vue de notre démonstration.

Considérons enfin le cas où α est de deuxième espèce; sa définition est donnée par une suite illimitée de nombres inférieurs $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots, \alpha_n < \ldots$ telle que tout nombre $< \alpha$ soit inférieur à l'un d'eux. Nous pouvons déjà, par hypothèse, pour chaque α_n, assigner une fonction

$$f_{\alpha_n}(x, t)$$

qui représente toutes les fonctions $f(x)$ des classes $<\alpha_n$. Nous pouvons supposer $f_{\alpha_n}(x, t)$ nulle pour toute valeur de t non intérieure à l'intervalle (0, 1).

Posons d'abord

$$\varphi(x, t) = f_{\alpha_1}(x, t) + f_{\alpha_2}(x, t-1) + \ldots + f_{\alpha_n}(x, t-n) + \ldots.$$

Cette série convergente définit une fonction de Baire. Elle peut se réduire à toute fonction $f(x)$ de classe $<\alpha$ par l'attribution d'une valeur positive à t, car elle se réduit à f_{α_n} dans l'intervalle $(n, n+1)$.

Posons maintenant

$$f_\alpha(x, t) = \varphi\left(x, \frac{t}{t-1}\right),$$

où t varie de 0 à 1 et où f_α sera nulle, par définition, pour $t = 1$. Cette fonction représente toutes les fonctions $f(x)$ des classes $<\alpha$ pour des valeurs correspondantes de t comprises entre 0 et 1. Elle répond donc à la question.

145. Existence des classes. — Il existe des fonctions des classes 0 et 1. Pour démontrer qu'il existe des fonctions de toutes les classes, il suffit de démontrer que, s'il existe des fonctions de toutes les classes $<\alpha$, il existe aussi des fonctions de classe α. C'est donc ce que nous allons faire.

Soit $f_\alpha(x, t)$ une fonction qui peut se réduire à toute fonction $f(x)$ de classe $<\alpha$ pour une valeur correspondante de t dans l'intervalle (0, 1). Rappelons que l'on ne considère que des fonctions $f(x)$ comprises entre 0 et 1. Posons

$$\psi(x, t) = \lim_{n=\infty} \frac{n f_\alpha(x, t)}{1 + n f_\alpha(x, t)}.$$

Cette fonction ψ est nulle si f_α est nulle, et égale à 1 si f_α est positive. Elle n'est susceptible que des seules valeurs 0 et 1, et elle est égale à f_α chaque fois que f_α est égale à 0 ou à 1.

Il suit de là que la fonction de Baire

$$\psi(x, t)$$

contient encore, pour des valeurs particulières de t, entre 0 et 1,

toutes les fonctions $f(x)$ des classes $< \alpha$ qui ne prennent que les deux valeurs 0 et 1.

Cela permet d'écrire immédiatement une fonction de Baire ne prenant que les valeurs 0 et 1 et qui sera certainement de classe $\geqq \alpha$. C'est la fonction

$$1 - \psi(x, x).$$

En effet, cette fonction de Baire (n° 143) n'est susceptible (avec ψ) que des valeurs 0 et 1, mais elle ne peut rentrer dans $\psi(x, t)$ pour aucune valeur de t; car si l'on avait, pour la valeur particulière t_0,

$$\psi(x, t_0) = 1 - \psi(x, x),$$

on en déduirait, pour $x = t_0$,

$$\psi(t_0, t_0) = \frac{1}{2},$$

tandis que ψ ne prend que les valeurs 0 et 1.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PREMIÈRE PARTIE.

Ensembles mesurables et intégrale de Lebesgue.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES ENSEMBLES DE POINTS.

CHAPITRE II.

MESURE DES ENSEMBLES ET FONCTIONS MESURABLES.

CHAPITRE III.

INTÉGRALE DE LEBESGUE.

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions additives d'ensemble.

CHAPITRE IV.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES DÉRIVÉES ET LES RÉSEAUX.

CHAPITRE V.

FONCTIONS D'ENSEMBLE ABSOLUMENT CONTINUES ET ADDITIVES. INTÉGRALES INDÉFINIES.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLE NORMAL.

TROISIÈME PARTIE.

Classes de Baire.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS DE CLASSE 1. THÉORÈME ET PROBLÈME DE BAIRE.

CHAPITRE VIII.

FONCTIONS DE CLASSE α. CONDITIONS GÉNÉRALISÉES DE LEBESGUE ET DE BAIRE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

[illegible] Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.